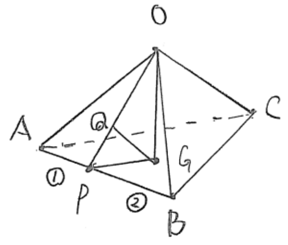
数学

岐阜大学　（前期）１／５

教育学部（イ)、地域科学部、応用生物科学部（応用生命科学課程、生産環境科学課程)、医学部（看護学科)、社会システム経営学環



$\boxed{1}$ (1) $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

より、 $\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}s\vec{a}+\frac{1}{3}s\vec{b}$。…(答)

また， $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ より，

$$\overrightarrow{QG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OQ}=\frac{1-2s}{3}\vec{a}+\frac{1-s}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}。\cdots(答)$$

(2) $\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{QG}$ のとき $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{QG}$ であるから、

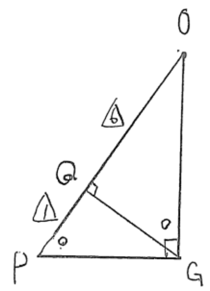
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QG}=0$ より $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OQ})=0$ すなわち、$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OG}-s|\overrightarrow{OP}|^2=0$。…①

ここで，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$， $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$ であるから、

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OG}=\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$$
$$=\frac{1}{9}\left(2|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=\frac{2}{3},$$

$$|\overrightarrow{OP}|^2=\frac{1}{9}\left(4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\right)=\frac{7}{9}.$$

よって①より $\frac{2}{3}-\frac{7}{9}s=0$． $s=\frac{6}{7}$。…(答)



(3) (2)の結果より，$\triangle OQG=\frac{6}{7}\triangle OPG$。

また，$OG\perp$(平面ABC) より，$OG\perp GP$。

ここで、$|\overrightarrow{OG}|^2=\frac{1}{9}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}\right)=\frac{2}{3}$ より，$|\overrightarrow{OG}|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$。

さらに、$\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ より，$|\overrightarrow{GP}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{CA}|=\frac{1}{3}$．

したがって、$\triangle OPG=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{6}}{18}$。

よって、$\triangle OQG=\frac{6}{7}\cdot\frac{\sqrt{6}}{18}=\frac{\sqrt{6}}{21}$。…(答)

(4) $OG\perp GP$ かつ $OP\perp GQ$ より

$\triangle OGQ\backsim\triangle OPG$。

よって、$\angle OGQ=\angle OPG=\theta$ とすると、

$$\tan\theta=\frac{OG}{PG}=\sqrt{6}。$$

よって．$\tan(\angle OGQ+\angle OPG)=\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$。…(答)

教育学部（イ）、地域科学部、応用生物科学部（応用生命科学課程、生産環境科学課程）、医学部（看護学科）、社会システム経営学環

$\boxed{2}$ $a_{n+1}=(\sqrt{2}-1)a_n+2$, … ①　$a_n=p_n+\sqrt{2}q_n$。… ②

(1) ①より $a_2=(\sqrt{2}-1)a_1+2=(\sqrt{2}-1)\cdot 1+2=1+\sqrt{2}$.

②より $a_1=p_1+\sqrt{2}q_1=1$, $a_2=p_2+\sqrt{2}q_2=1+\sqrt{2}$.

p_1, p_2, q_1, q_2 は整数(有理数), $\sqrt{2}$ は無理数より $p_1=1$, $p_2=1$, $q_1=0$, $q_2=1$. …(答)

(2) ①, ②より $p_{n+1}+\sqrt{2}q_{n+1}=a_{n+1}=(\sqrt{2}-1)a_n+2=(\sqrt{2}-1)(p_n+\sqrt{2}q_n)+2=-p_n+2q_n+2+(p_n-q_n)\sqrt{2}$。

p_{n+1}, q_{n+1}, $-p_n+2q_n+2$, p_n-q_n は整数(有理数), $\sqrt{2}$ は無理数より,

$$p_{n+1}=-p_n+2q_n+2,\quad q_{n+1}=p_n-q_n。\ \cdots ③\qquad \cdots(答)$$

(3) $b_n=a_n-(2+\sqrt{2})$ および①より,

$$b_{n+1}=a_{n+1}-(2+\sqrt{2})=(\sqrt{2}-1)a_n+2-(2+\sqrt{2})=(\sqrt{2}-1)\{a_n-(2+\sqrt{2})\}=(\sqrt{2}-1)b_n.\ \cdots(答)$$

よって, $\{b_n\}$ は初項 $a_1-(2+\sqrt{2})=-\sqrt{2}-1$, 公比 $\sqrt{2}-1$ の等比数列より, $b_n=(-\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^{n-1}=-(\sqrt{2}-1)^{n-2}$. …(答)

(4) $c_n=p_n-\sqrt{2}q_n$ および③より,

$$c_{n+1}=p_{n+1}-\sqrt{2}q_{n+1}=(-p_n+2q_n+2)-\sqrt{2}(p_n-q_n)=(-\sqrt{2}-1)(p_n-\sqrt{2}q_n)+2=(-\sqrt{2}-1)c_n+2。\ \cdots(答)$$

(5) (4)の結果の式は $c_{n+1}-(2-\sqrt{2})=(-\sqrt{2}-1)\{c_n-(2-\sqrt{2})\}$ と変形できる。

よって, $\{c_n-(2-\sqrt{2})\}$ は初項 $c_1-(2-\sqrt{2})=p_1-\sqrt{2}q_1-2+\sqrt{2}=\sqrt{2}-1$, 公比 $-\sqrt{2}-1$ の等比数列より,

$c_n-(2-\sqrt{2})=(\sqrt{2}-1)(-\sqrt{2}-1)^{n-1}$, すなわち $p_n-\sqrt{2}q_n=-(-\sqrt{2}-1)^{n-2}+2-\sqrt{2}$。… ④

また(3)より $a_n=b_n+2+\sqrt{2}=-(\sqrt{2}-1)^{n-2}+2+\sqrt{2}$ であること, および②より, $p_n+\sqrt{2}q_n=-(\sqrt{2}-1)^{n-2}+2+\sqrt{2}$。… ⑤

④+⑤より, $2p_n=-(\sqrt{2}-1)^{n-2}-(-\sqrt{2}-1)^{n-2}+4$ すなわち $p_n=\dfrac{-(\sqrt{2}-1)^{n-2}-(-\sqrt{2}-1)^{n-2}+4}{2}$。…(答)

⑤−④より, $2\sqrt{2}q_n=-(\sqrt{2}-1)^{n-2}+(-\sqrt{2}-1)^{n-2}+2\sqrt{2}$ すなわち $q_n=\dfrac{-(\sqrt{2}-1)^{n-2}+(-\sqrt{2}-1)^{n-2}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$。…(答)

教育学部（イ）、地域科学部、応用生物科学部（応用生命科学課程、生産環境科学課程）、医学部（看護学科）、社会システム経営学環

3

次のように6つのマスをA, B, C, D, E, Fとする．
6個の数字の並べ方は全部で　${}_6P_6 = 6! = 720$ (通り)．

	左	中央	右
上	A	B	C
下	D	E	F

(1)　a_1が奇数となるのは，A, B, Cに奇数，D, E, Fに偶数を並べるときであるから，

$${}_3P_3 \times {}_3P_3 = 36 \text{ (通り)}.$$

…(答)

(2)　a_1が偶数となるのは，(1)の補集合を考えて

$$720 - 36 = 684 \text{ (通り)}.$$

…(答)

(3)　b_1が奇数となるのは，A, Dに奇数，B, C, E, Fに残りの4枚を並べるときであるから，

	左	中央	右
上	奇		
下	奇		

$${}_3P_2 \times {}_4P_4 = 6 \times 24 = 144 \text{ (通り)}.$$

これより，b_1が偶数となるのは補集合を考えて

$$720 - 144 = 576 \text{ (通り)}.$$

…(答)

(4)　a_1, a_2がともに奇数となることはない．
a_1, a_2で一方が奇数，他方が偶数となるのは(1)と同様で

$$36 \times 2 = 72 \text{ (通り)}.$$

これより，a_1, a_2がともに偶数となるのは，

$$720 - 72 = 648 \text{ (通り)}.$$

…(答)

(5)　a_1, a_2, b_1, b_2, b_3がすべて偶数となるのは，偶数，奇数の並び方が次の6通りのときである

	左	中央	右
上	偶	偶	奇
下	奇	奇	偶

	左	中央	右
上	偶	奇	偶
下	奇	偶	奇

	左	中央	右
上	偶	奇	奇
下	奇	偶	偶

	左	中央	右
上	奇	奇	偶
下	偶	偶	奇

	左	中央	右
上	奇	偶	奇
下	偶	奇	偶

	左	中央	右
上	奇	偶	偶
下	偶	奇	奇

それぞれの偶奇の並べ方が　${}_3P_3 \times {}_3P_3 = 36$ (通り)あるから，
a_1, a_2, b_1, b_2, b_3がすべて偶数となるのは，

$$36 \times 6 = 216 \text{ (通り)}.$$

…(答)

教育学部（イ）、地域科学部、応用生物科学部（応用生命科学課程、生産環境科学課程）、
医学部（看護学科）、社会システム経営学環

4

$$f(x)=x^3-3x^2+p.$$

(1)
$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

より，$f(x)$ の増減は次のとおり．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	p	$\searrow$	$p-4$	$\nearrow$

…(答)

$f(x)$ の極値は，極大値 p，極小値 $p-4$．…(答)

(2)　方程式 $f(x)=0$ の実数解は，$y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標であるから，
$f(x)=0$ が異なる3個の実数解をもつための条件は，共有点を3個もつことである．

「($f(x)$ の極大値)>0 かつ ($f(x)$ の極小値)<0」，すなわち，「$p>0$ かつ $p-4<0$」

より，p のとり得る値の範囲は，$0<p<4$．…(答)

(3)
$$f(1)=1-3+p=p-2$$

より，$f(1)=0$ のとき，p の値は，

$$p=2.$$

よって，$f(1)=0$ のとき，p は(2)で求めた範囲にある．(証明終り)

(4)　(3)のとき，

$$f(x)=x^3-3x^2+2=(x-1)(x^2-2x-2).$$

よって，α，β は2次方程式 $x^2-2x-2=0$ の2つの解であるから，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-2.$$ …(答)

(5)
$$f(x)=(x-\alpha)(x-1)(x-\beta)\quad(\alpha<1<\beta)$$

より，$\alpha\leqq x\leqq 1$ においては $f(x)\geqq 0$，$1\leqq x\leqq\beta$ においては $f(x)\leqq 0$ であるから，

$$\begin{aligned}
S_1-S_2&=\int_\alpha^1 f(x)\,dx-\int_1^\beta\{-f(x)\}\,dx\\
&=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\\
&=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+2x\right]_\alpha^\beta\\
&=\frac{1}{4}(\beta^4-\alpha^4)-(\beta^3-\alpha^3)+2(\beta-\alpha)\\
&=(\beta-\alpha)\left\{\frac{1}{4}(\beta+\alpha)(\beta^2+\alpha^2)-(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)+2\right\}\\
&=(\beta-\alpha)\left[\frac{1}{4}(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}-\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}+2\right]\\
&=(\beta-\alpha)\left[\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\{2^2-2\cdot(-2)\}-\{2^2-(-2)\}+2\right]\\
&=0.
\end{aligned}$$

よって，$S_1=S_2$ となる．(証明終り)

岐阜大学　（前期）５／５

教育学部（イ）、地域科学部、応用生物科学部（応用生命科学課程、生産環境科学課程）、医学部（看護学科）、社会システム経営学環

5

(1) $\log_2 k - 6\log_k 2 = -1$ より，$\log_2 k - 6\cdot\dfrac{\log_2 2}{\log_2 k} = -1$.

よって，$(\log_2 k)^2 + \log_2 k - 6 = 0$ であるから，$(\log_2 k + 3)(\log_2 k - 2) = 0$.

$k \geqq 2$ より $\log_2 k \geqq 1$ なので，$\log_2 k = 2$.　よって，$k = 4$. …(答)

(2) $-1 \leqq \log_2 x - 6\log_x 2 \leqq 1$ より $-1 \leqq \log_2 x - 6\cdot\dfrac{\log_2 2}{\log_2 x} \leqq 1$.

$x \geqq 2$ より $\log_2 x \geqq 1$ であるから，$-\log_2 x \leqq (\log_2 x)^2 - 6 \leqq \log_2 x$.

よって，$\begin{cases}(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 6 \geqq 0, \\ (\log_2 x)^2 - \log_2 x - 6 \leqq 0.\end{cases}$　すなわち，$2 \leqq \log_2 x \leqq 3$.

$\log_2 x$ は整数なので，$\log_2 x = 2, 3$.　よって，$x = 4, 8$. …(答)

(3) $-1 \leqq \log_n x - 6\log_x n \leqq 1$ より $-1 \leqq \log_n x - 6\cdot\dfrac{1}{\log_n x} \leqq 1$.

n, x は2以上の整数より $\log_n x > 0$ であるから，$-\log_n x \leqq (\log_n x)^2 - 6 \leqq \log_n x$.

よって，$\begin{cases}(\log_n x)^2 + \log_n x - 6 \geqq 0, \\ (\log_n x)^2 - \log_n x - 6 \leqq 0.\end{cases}$　すなわち，$2 \leqq \log_n x \leqq 3$ なので，$\log_n n^2 \leqq \log_n x \leqq \log_n n^3$.

すなわち，$n^2 \leqq x \leqq n^3$ であるから，求める x の個数 S_n は　$S_n = n^3 - n^2 + 1$. …(答)

(4) $S_{n+1} - S_n = (n+1)^3 - (n+1)^2 + 1 - (n^3 - n^2 + 1) = 3n^2 + n$.

$n \geqq 2$ であるから $3n^2 + n > 0$ となり，$S_n < S_{n+1}$.

また，$S_2 = 5$, $S_3 = 19$, $S_4 = 49$, $S_5 = 101$ なので，$10 \leqq S_n \leqq 100$ となる整数 n は $n = 3, 4$. …(答)