岐阜大学　（前期）　1 / 6

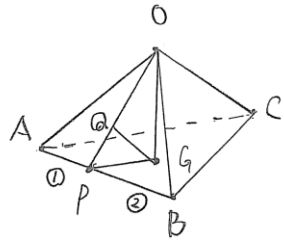
教育学部（ロ）、工学部、応用生物科学部（応用生命科学課程、生産環境科学課程）、医学部（医学科）

1 (1) $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

より、$\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}s\vec{a}+\frac{1}{3}s\vec{b}$。…（答）

また，$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ より，

$$\overrightarrow{QG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OQ}=\frac{1-2s}{3}\vec{a}+\frac{1-s}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}。…（答）$$



(2) $\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{QG}$ のとき $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{QG}$ であるから、

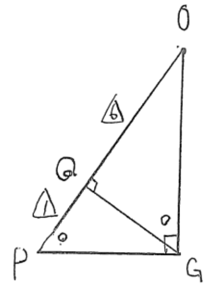
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QG}=0$ より $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OQ})=0$ すなわち、$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OG}-s|\overrightarrow{OP}|^2=0$。…①

ここで，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$ であるから、

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OG}=\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$$
$$=\frac{1}{9}\left(2|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=\frac{2}{3},$$

$$|\overrightarrow{OP}|^2=\frac{1}{9}\left(4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\right)=\frac{7}{9}.$$

よって①より $\frac{2}{3}-\frac{7}{9}s=0$．$s=\frac{6}{7}$。…（答）



(3) (2)の結果より，$\triangle OQG=\frac{6}{7}\triangle OPG$。

また，OG⊥（平面ABC）より，OG⊥GP。

ここで、$|\overrightarrow{OG}|^2=\frac{1}{9}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}\right)=\frac{2}{3}$ より，$|\overrightarrow{OG}|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$。

さらに、$\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ より，$|\overrightarrow{GP}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{CA}|=\frac{1}{3}$．

したがって、$\triangle OPG=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{6}}{18}$。

よって、$\triangle OQG=\frac{6}{7}\cdot\frac{\sqrt{6}}{18}=\frac{\sqrt{6}}{21}$。…（答）

(4) OG⊥GP かつ OP⊥GQ より

$\triangle OGQ \backsim \triangle OPG$。

よって、$\angle OGQ=\angle OPG=\theta$ とすると、

$\tan\theta=\frac{OG}{PG}=\sqrt{6}$。

よって，$\tan(\angle OGQ+\angle OPG)=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$。…（答）

教育学部（ロ）、工学部、応用生物科学部（応用生命科学課程、生産環境科学課程）、医学部（医学科）

$\boxed{2}$ $a_{n+1}=(\sqrt{2}-1)a_n+2$, …① $a_n=p_n+\sqrt{2}q_n$。…②

(1) ①より $a_2=(\sqrt{2}-1)a_1+2=(\sqrt{2}-1)\cdot 1+2=1+\sqrt{2}$.

②より $a_1=p_1+\sqrt{2}q_1=1$, $a_2=p_2+\sqrt{2}q_2=1+\sqrt{2}$.

p_1, p_2, q_1, q_2 は整数(有理数), $\sqrt{2}$ は無理数より $p_1=1$, $p_2=1$, $q_1=0$, $q_2=1$. …(答)

(2) ①, ②より $p_{n+1}+\sqrt{2}q_{n+1}=a_{n+1}=(\sqrt{2}-1)a_n+2=(\sqrt{2}-1)(p_n+\sqrt{2}q_n)+2=-p_n+2q_n+2+(p_n-q_n)\sqrt{2}$。

$p_{n+1}, q_{n+1}, -p_n+2q_n+2, p_n-q_n$ は整数(有理数), $\sqrt{2}$ は無理数より,

$$p_{n+1}=-p_n+2q_n+2,\quad q_{n+1}=p_n-q_n。\ \cdots③ \qquad \cdots(答)$$

(3) $b_n=a_n-(2+\sqrt{2})$ および①より,

$$b_{n+1}=a_{n+1}-(2+\sqrt{2})=(\sqrt{2}-1)a_n+2-(2+\sqrt{2})=(\sqrt{2}-1)\{a_n-(2+\sqrt{2})\}=(\sqrt{2}-1)b_n。\ \cdots(答)$$

よって, $\{b_n\}$ は初項 $a_1-(2+\sqrt{2})=-\sqrt{2}-1$, 公比 $\sqrt{2}-1$ の等比数列より, $b_n=(-\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^{n-1}=-(\sqrt{2}-1)^{n-2}$。…(答)

(4) $c_n=p_n-\sqrt{2}q_n$ および③より,

$$c_{n+1}=p_{n+1}-\sqrt{2}q_{n+1}=(-p_n+2q_n+2)-\sqrt{2}(p_n-q_n)=(-\sqrt{2}-1)(p_n-\sqrt{2}q_n)+2=(-\sqrt{2}-1)c_n+2。\ \cdots(答)$$

(5) (4)の結果の式は $c_{n+1}-(2-\sqrt{2})=(-\sqrt{2}-1)\{c_n-(2-\sqrt{2})\}$ と変形できる。

よって, $\{c_n-(2-\sqrt{2})\}$ は初項 $c_1-(2-\sqrt{2})=p_1-\sqrt{2}q_1-2+\sqrt{2}=\sqrt{2}-1$, 公比 $-\sqrt{2}-1$ の等比数列より,

$$c_n-(2-\sqrt{2})=(\sqrt{2}-1)(-\sqrt{2}-1)^{n-1},\ すなわち\ p_n-\sqrt{2}q_n=-(-\sqrt{2}-1)^{n-2}+2-\sqrt{2}。\ \cdots④$$

また(3)より $a_n=b_n+2+\sqrt{2}=-(\sqrt{2}-1)^{n-2}+2+\sqrt{2}$ であること, および②より, $p_n+\sqrt{2}q_n=-(\sqrt{2}-1)^{n-2}+2+\sqrt{2}$。…⑤

④+⑤より, $2p_n=-(\sqrt{2}-1)^{n-2}-(-\sqrt{2}-1)^{n-2}+4$ すなわち $p_n=\dfrac{-(\sqrt{2}-1)^{n-2}-(-\sqrt{2}-1)^{n-2}+4}{2}$。…(答)

⑤−④より, $2\sqrt{2}q_n=-(\sqrt{2}-1)^{n-2}+(-\sqrt{2}-1)^{n-2}+2\sqrt{2}$ すなわち $q_n=\dfrac{-(\sqrt{2}-1)^{n-2}+(-\sqrt{2}-1)^{n-2}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$。…(答)

教育学部（ロ）、工学部、応用生物科学部（応用生命科学課程、生産環境科学課程）、医学部（医学科）

3

次のように6つのマスをA, B, C, D, E, Fとする．

6個の数字の並べ方は全部で ${}_6P_6 = 6! = 720$（通り）．

	左	中央	右
上	A	B	C
下	D	E	F

(1) a_1が奇数となるのは，A, B, Cに奇数，D, E, Fに偶数を並べるときであるから，

$${}_3P_3 \times {}_3P_3 = 36 \text{（通り）}.$$

…（答）

(2) a_1が偶数となるのは，(1)の補集合を考えて

$$720 - 36 = 684 \text{（通り）}.$$

…（答）

(3) b_1が奇数となるのは，A, Dに奇数，B, C, E, Fに残りの4枚を並べるときであるから，

	左	中央	右
上	奇		
下	奇		

$${}_3P_2 \times {}_4P_4 = 6 \times 24 = 144 \text{（通り）}.$$

これより，b_1が偶数となるのは補集合を考えて

$$720 - 144 = 576 \text{（通り）}.$$

…（答）

(4) a_1, a_2がともに奇数となることはない．

a_1, a_2で一方が奇数，他方が偶数となるのは(1)と同様で

$$36 \times 2 = 72 \text{（通り）}.$$

これより，a_1, a_2がともに偶数となるのは，

$$720 - 72 = 648 \text{（通り）}.$$

…（答）

(5) a_1, a_2, b_1, b_2, b_3がすべて偶数となるのは，偶数，奇数の並び方が次の6通りのときである

	左	中央	右
上	偶	偶	奇
下	奇	奇	偶

	左	中央	右
上	偶	奇	偶
下	奇	偶	奇

	左	中央	右
上	偶	奇	奇
下	奇	偶	偶

	左	中央	右
上	奇	奇	偶
下	偶	偶	奇

	左	中央	右
上	奇	偶	奇
下	偶	奇	偶

	左	中央	右
上	奇	偶	偶
下	偶	奇	奇

それぞれの偶奇の並べ方が ${}_3P_3 \times {}_3P_3 = 36$（通り）あるから，

a_1, a_2, b_1, b_2, b_3がすべて偶数となるのは，

$$36 \times 6 = 216 \text{（通り）}.$$

…（答）

教育学部（ロ）、工学部、応用生物科学部（応用生命科学課程、生産環境科学課程）、医学部（医学科）

4

(1) $f^{(1)}(x)=1\cdot e^x+xe^x=(x+1)e^x$. ・・・（答）

$f^{(2)}(x)=1\cdot e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$. ・・・（答）

$f^{(3)}(x)=1\cdot e^x+(x+2)e^x=(x+3)e^x$. ・・・（答）

(2)「$f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$」・・・(＊) と推測できる。

(i) $n=1$ のとき，(1)から

$f^{(1)}(x)=(x+1)e^x$ であり，(＊)は $n=1$ で成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，(＊)が成り立つとすると

$f^{(k)}(x)=(x+k)e^x$.

このとき，$f^{(k+1)}(x)=1\cdot e^x+(x+k)e^x=(x+k+1)e^x$ となり，(＊)は $n=k+1$ で成り立つ．

(i),(ii) から，数学的帰納法により，(＊)はすべての自然数 n に対して成り立つ．　（証明終り）

曲線 $y=f^{(n)}(x)$ と x 軸の共有点の個数は，

$$(x+n)e^x=0$$

すなわち，

$$x+n=0$$

の異なる実数解の個数に等しい．よって，共有点の個数は1個．・・・（答）

(3)「$g^{(n)}(x)=(x^2+p_nx+q_n)e^x$ （p_n, q_n は実数）と表される」・・・(＊＊)

(i) $n=1$ のとき，

$g^{(1)}(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$.

$p_1=2$，$q_1=0$ とすれば，(＊＊)は $n=1$ で成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，(＊＊)が成り立つとすると

$g^{(k)}(x)=(x^2+p_kx+q_k)e^x$ （p_k, q_k は実数）と表される．

このとき，$g^{(k+1)}(x)=(2x+p_k)e^x+(x^2+p_kx+q_k)e^x$

$=\{x^2+(p_k+2)x+p_k+q_k\}e^x$.

$p_{k+1}=p_k+2$，$q_{k+1}=p_k+q_k$ とおくと，p_{k+1}，q_{k+1} も実数となるので，

(＊＊)は $n=k+1$ で成り立つ．

(i),(ii) から，数学的帰納法により，(＊＊)はすべての自然数 n に対して成り立つ．（証明終り）

数学

教育学部（ロ）、工学部、応用生物科学部（応用生命科学課程、生産環境科学課程）、医学部（医学科）

$\boxed{4}$の解答のつづき

(4) (3) から

$p_1 = 2,\ q_1 = 0,$

$p_{n+1} = p_n + 2 \quad \cdots ①$ $\qquad q_{n+1} = q_n + p_n \quad \cdots ②$

①から，数列$\{p_n\}$は，初項 $p_1 = 2$，公差 2 の等差数列なので，

$p_n = 2 + (n-1)\cdot 2 = 2n.$

②から，$n \geqq 2$ に対して

$q_n = q_1 + \sum_{k=1}^{n-1} p_k = 0 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k) = n(n-1)$ （これは$n=1$のときも成り立つ）.

よって

$g^{(n)}(x) = \{x^2 + 2n\cdot x + n(n-1)\}e^x \quad \cdots$（答）

曲線 $y = g^{(n)}(x)$ と x 軸の共有点の個数は

$\{x^2 + 2nx + n(n-1)\}e^x = 0$

すなわち，

$x^2 + 2nx + n(n-1) = 0 \quad \cdots ③$

の異なる実数解の個数に等しい．③の判別式を D とすると

$D/4 = n^2 - n(n-1) = n > 0.$

よって，共有点の個数は 2個． ・・・（答）

数学

岐阜大学　（前期） 6 / 6

教育学部（ロ）、工学部、応用生物科学部（応用生命科学課程、生産環境科学課程）、医学部（医学科）

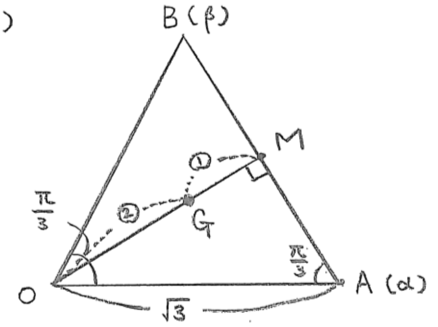
5

(1)　点Mを表す複素数は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.　…（答）

　点Gを表す複素数は $\dfrac{\alpha+\beta}{3}$.　…（答）

(2)　$\beta=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\alpha$ より　$\beta=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha$.　…（答）

(3)



△OABは正三角形であるから、

$OM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}OA=\dfrac{3}{2}$.

$OG=\dfrac{2}{3}OM=1$.

点Gを表す複素数の実部を $x\ (>0)$ とすると、

点Gを表す複素数は　$x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$.

$OG^2=1$ より　$x^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=1$.　よって　$x^2=\dfrac{2}{3}$.

$x>0$ より　$x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(1) より　$\dfrac{\alpha+\beta}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$.

よって　$\alpha+\beta=\sqrt{6}-\sqrt{3}i$.

$\alpha+\beta$ の虚部は　$-\sqrt{3}$.　…（答）

$\alpha+\beta$ の実部は　$\sqrt{6}$.　…（答）