I

(1) 1 回の試行で得る得点と確率は次の通り．

$$2\text{ 点}:\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\,,\quad 1\text{ 点}:\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\,.$$

p_1 は 1 回目の試行で 1 点を得る確率であるから，

$$p_1=\frac{2}{3}\,.$$

p_2 は「1 回目と 2 回目の試行で 1 点ずつ得るか，1 回目の試行で 2 点を得る」確率であるから，

$$p_2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}\,,\quad p_2-p_1\overset{\text{ア}}{=}\boxed{\frac{1}{9}}\,.$$

一般に自然数 n に対して，得点の合計が途中でちょうど $n+2$ 点となるのは，

(ア) 1 回目に 1 点を得て，その後合計 $n+1$ 点を得る

(イ) 1 回目に 2 点を得て，その後合計 n 点を得る

のいずれかの場合であり，これらは排反である．

したがって，

$$p_{n+2}=\frac{2}{3}p_{n+1}+\frac{1}{3}p_n\,.\qquad\cdots①$$

よって，

$$p_3=\frac{2}{3}p_2+\frac{1}{3}p_1=\frac{20}{27}\,,\quad p_4=\frac{2}{3}p_3+\frac{1}{3}p_2\overset{\text{イ}}{=}\boxed{\frac{61}{81}}\,.$$

また，① より

$$\begin{cases}p_{n+2}+\dfrac{1}{3}p_{n+1}=p_{n+1}+\dfrac{1}{3}p_n\,,\\ p_{n+2}-p_{n+1}=-\dfrac{1}{3}(p_{n+1}-p_n)\end{cases}$$

を得るから，$a\overset{\text{ウ}}{=}\boxed{-\frac{1}{3}}$ であり，これらの式から

$$\begin{cases}p_{n+1}+\dfrac{1}{3}p_n=p_2+\dfrac{1}{3}p_1=1\,,\\ p_{n+1}-p_n=(p_2-p_1)\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}.\end{cases}$$

辺々引いて $\frac{3}{4}$ 倍すると，

$$p_n\overset{\text{エ}}{=}\boxed{\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}}\,.$$

また，ちょうど n 点（ $n\geqq 2$ ）となることなくちょうど $(n+5)$ 点となるのは，途中で合計点が $n-1$ 点となり，その直後の試行で 2 点を得て，その後合計 4 点を得る場合であるから，その確率は

$$p_{n-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot p_4\overset{\text{オ}}{=}\boxed{\frac{61}{324}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}\,.$$

(2) -8 の 3 乗根は $x^3=-8$ の解である．

$$x^3=-8\quad\text{より}\quad (x+2)(x^2-2x+4)=0\,.$$

$$x=-2\,,\ 1\pm\sqrt{3}i\quad\text{より}\quad\alpha=1+\sqrt{3}i\,.$$

よって，α の虚部は $\overset{\text{カ}}{\boxed{\sqrt{3}}}$ である．

次に，

$$4\alpha+(\sqrt{3}-2+i)\beta=(\sqrt{3}+2+i)\gamma$$

のとき，$z=\beta-\alpha\,,\,w=\gamma-\alpha$ とおくと，

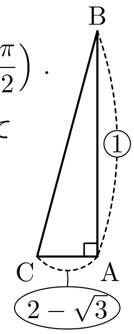
$$4\alpha+(\sqrt{3}-2+i)(z+\alpha)=(\sqrt{3}+2+i)(w+\alpha)\,.$$

$$(\sqrt{3}-2+i)z=(\sqrt{3}+2+i)w\,.$$

$$\begin{aligned}\frac{w}{z}&=\frac{\sqrt{3}-2+i}{\sqrt{3}+2+i}\\&=\frac{(\sqrt{3}-2+i)(\sqrt{3}+2-i)}{(\sqrt{3}+2)^2+1^2}\\&=\frac{4i}{8+4\sqrt{3}}\\&=(2-\sqrt{3})i\,,\end{aligned}$$

すなわち，

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=(2-\sqrt{3})\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\,.$$



よって，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\frac{\pi}{2}$ 回転して $2-\sqrt{3}$ 倍したベクトルであるから，

$$\angle\mathrm{A}\overset{\text{キ}}{=}\boxed{\frac{1}{2}}\pi\quad\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=2-\sqrt{3}\,.$$

ここで，半角の公式より

$$\tan^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=(2-\sqrt{3}\,)^2$$

であるから，$\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$．

このことも考慮すると，$\angle\mathrm{B}\overset{\text{ク}}{=}\boxed{\frac{1}{12}}\pi$ である．

また，

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{AC}}{\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2}}=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{4(2-\sqrt{3})}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

であるから，

$$|\alpha-\gamma|=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}|\beta-\gamma|\overset{\text{ケ}}{=}\boxed{3\sqrt{2}}-\sqrt{6}\,.$$

さらに，直角三角形 ABC の斜辺 BC は外接円の直径であるから，

$$(\text{外接円の半径})=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=\frac{1}{2}|\beta-\gamma|\overset{\text{コ}}{=}\boxed{2\sqrt{3}}\,.$$

II

(1) 直線 ℓ の傾きは

$$\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{\beta-\alpha}=\alpha+\beta$$

であるから，ℓ の方程式は

$$y-\alpha^2=(\alpha+\beta)(x-\alpha)\ .$$

$$y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta\ .$$

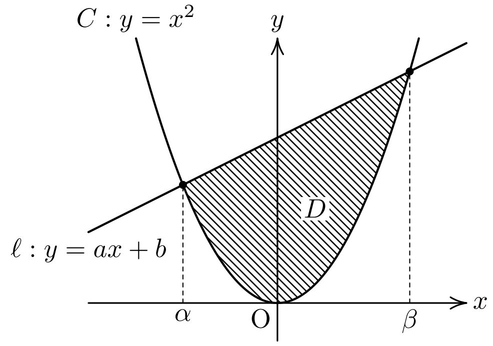
よって，

$$a=\boldsymbol{\alpha+\beta}\ ,\quad b=\boldsymbol{-\alpha\beta}\ . \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $\alpha<x<\beta$ において

$$x^2-(ax+b)=(x-\alpha)(x-\beta)<0$$

であるから，この区間において曲線 C は直線 ℓ の下側にある．



よって，C と ℓ で囲まれた図形 D の面積は，

$$\int_\alpha^\beta\{(ax+b)-x^2\}\,dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\ .$$

これが 36 に等しいとき，

$$(\beta-\alpha)^3=6^3\ .$$

$\beta-\alpha$ は実数であるから，

$$\beta-\alpha=\boldsymbol{6}\ . \qquad \cdots(\text{答})$$

(3)

$$V=\int_\alpha^\beta\pi(ax+b)^2\,dx-\int_\alpha^\beta\pi(x^2)^2\,dx$$

$$=\pi\int_\alpha^\beta(a^2x^2+2abx+b^2-x^4)\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{a^2}{3}x^3+abx^2+b^2x-\frac{1}{5}x^5\right]_\alpha^\beta$$

$$=\pi\left\{\frac{a^2}{3}(\beta^3-\alpha^3)+ab(\beta^2-\alpha^2)+b^2(\beta-\alpha)-\frac{1}{5}(\beta^5-\alpha^5)\right\}\ .$$

ここで，$c=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ より $\alpha+\beta=2c$ ．

これと (2) の結果より，

$$\alpha=c-3\ ,\quad \beta=c+3$$

であるから，

$$\beta^5-\alpha^5=2(5c^4\cdot3+10c^2\cdot3^3+3^5)$$

$$=6(5c^4+90c^2+81)\ ,$$

$$\beta^3-\alpha^3=2(3c^2\cdot3+3^3)=18(c^2+3)\ ,$$

$$\beta^2-\alpha^2=2\cdot6c=12c\ .$$

また，(1) の結果より

$$a=2c\ ,\quad b=-(c-3)(c+3)=9-c^2\ .$$

よって，

$$V=\pi\left\{\frac{(2c)^2}{3}\cdot18(c^2+3)+2c(9-c^2)\cdot12c+(9-c^2)^2\cdot6-\frac{1}{5}\cdot6(5c^4+90c^2+81)\right\}$$

$$=\boldsymbol{\pi\left(72c^2+\frac{1944}{5}\right)}\ . \qquad \cdots(\text{答})$$

したがって，$c=0$ のとき V は最小値

$$\boldsymbol{\frac{1944}{5}\pi} \qquad \cdots(\text{答})$$

をとる．また，このとき

$$\alpha=\boldsymbol{-3}\ ,\quad \beta=\boldsymbol{3}\ . \qquad \cdots(\text{答})$$

III

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=(-1,\ 0,\ 2)+t(u+1,\ v,\ -2)\\&=\boldsymbol{(-1+(u+1)t,\ vt,\ 2-2t)}.\end{aligned}\quad\cdots(答)$$

このMが S 上にある条件は，

$$\{-1+(u+1)t\}^2+(vt)^2+(2-2t)^2=1\ . \quad\cdots①$$

$$\{(u+1)^2+v^2+4\}t^2-2(u+5)t+4=0\ . \quad\cdots①'$$

直線APが S に接する条件は ①′ を満たす実数 t が1つだけであること，すなわち，t の2次方程式 ①′ の判別式が0となることである．

①′ の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(u+5)^2-\{(u+1)^2+v^2+4\}\cdot 4\\&=-(3u^2+4v^2-2u-5)\end{aligned}$$

であるから，点Pの軌跡 H の方程式は，

$$\boldsymbol{3u^2+4v^2-2u-5=0}\ . \qquad\cdots(答)$$

(2) B$(-1,\ 0,\ -2)$ のとき，Q$(u,\ v,\ 0)$ とおくとBQ上の点は

$$(-1+(u+1)t,\ vt,\ -2+2t)$$

とおけて，これが S 上にある条件は ① に一致する．

したがって，以下 (1) と同じ計算をたどり，点Qの軌跡が H に一致することがわかる．

よって，条件を満たすB（の1つ）は

$$\boldsymbol{(-1,\ 0,\ -2)}\ . \qquad\cdots(答)$$

(3) H の方程式は

$$3\left(u-\frac{1}{3}\right)^2+4v^2=\frac{16}{3}\ ,$$

すなわち，

$$(3u-1)^2+12v^2=16 \qquad\cdots②$$

と変形できる．

$$16-12v^2=(3u-1)^2\geqq 0 \quad より \quad v^2\leqq\frac{4}{3}$$

であるから，v のとり得る整数値は 0 , ±1 のみである．

$v=0$ のとき，② より $3u-1=\pm4$ であり，このうち u も整数となるものは

$$(u,\ v)=(-1,\ 0)\ .$$

$v=\pm1$ のとき，② より $3u-1=\pm2$ であり，このうち u も整数となるものは

$$(u,\ v)=(1,\ 1)\ ,\ (1,\ -1)\ .$$

よって，H 上の格子点は

$$\boldsymbol{(-1,\ 0,\ 0)}\ ,\ \boldsymbol{(1,\ 1,\ 0)}\ ,\ \boldsymbol{(1,\ -1,\ 0)}\ . \qquad\cdots(答)$$

(4) 格子点C , D , Eを以下のようにとる．

C$(-1,\ 0,\ -2)$, D$(1,\ 1,\ 0)$, E$(1,\ -1,\ 0)$.

以下，四面体ACDEの辺について調べる．

辺ABは

線分 $x=-1$ かつ $y=0$ かつ $-2\leqq z\leqq 2$

と表せるから，S に接する長さ4の線分である．

辺DEは

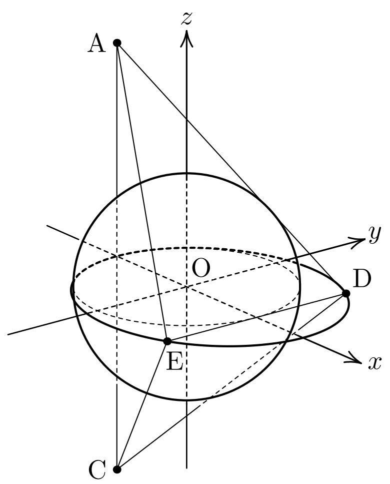
線分 $x=1$ かつ $z=0$ かつ $-1\leqq y\leqq 1$

と表せるから，S に接する長さ2の線分である．

Cは (2) で発見した点であり，D , Eは H 上の点であるから，辺AD , AE , CD , CEは S に接する．また，対称性からこれら4辺の長さは等しく，

$$\mathrm{AD}=\sqrt{(1+1)^2+(1-0)^2+(0-2)^2}=3$$

である．



よって，条件 (i) , (ii) , (iii) を満たす点C , D , Eの組（の1つ）は

$$\boldsymbol{(-1,\ 0,\ -2)}\ ,\ \boldsymbol{(1,\ 1,\ 0)}\ ,\ \boldsymbol{(1,\ -1,\ 0)}\ . \qquad\cdots(答)$$

(注) $u=1$, $v=1$ のとき，①′ は

$$9t^2-12t+4=0 \ すなわち\ (3t-2)^2=0$$

となるから，$t=\dfrac{2}{3}$ を重解にもつ．

したがって，辺ADと S の接点は $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を満たす点M，すなわち，ADを $2:1$ に内分する点である．(注終り)

IV

(1)　$g(t)=(1-2t^2)\sin t-t\cos t$ より，

$$g'(t)=\{(-4t)\sin t+(1-2t^2)\cos t\}-\{1\cos t+t(-\sin t)\}$$
$$=\boldsymbol{-3t\sin t-2t^2\cos t}\ .\qquad\cdots(答)$$

(2)　$t=\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3}{2}\pi$ のとき $g'(t)\neq 0$ であるから，以下

$$0<t<\frac{5}{2}\pi\ ,\quad t\neq\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3}{2}\pi\qquad\cdots①$$

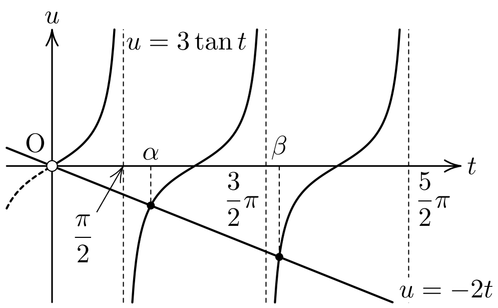
のときを考える．このとき，(1) より

$$g'(t)=-t\cos t(3\tan t+2t)\ .$$

① の範囲において $t\cos t\neq 0$ であるから，方程式 $g'(t)=0$ の実数解は

$$3\tan t=-2t$$

の実数解であり，これは $u=3\tan t$, $u=-2t$ のグラフの共有点の t 座標である．



よって，$0<t<\dfrac{5}{2}\pi$ における方程式 $g'(t)=0$ の実数解の個数は **2 個** である．　$\cdots$(答)

(3)　(2) の考察より，$0<t<\dfrac{5}{2}\pi$ における方程式 $g'(t)=0$ の解は 2 個あり，それらを小さい方から α , β とすると，$0<t<\dfrac{5}{2}\pi$ における $g(t)$ の増減は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	$\left(\dfrac{5}{2}\pi\right)$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	(0)	↘		↗		↘	

方程式 $g(t)=0$ の実数解は，$u=g(t)$ のグラフと t 軸の共有点の t 座標であるから，

$$g(\pi)=\pi>0\ ,\quad g(2\pi)=-2\pi<0$$

も考慮すると，$0<t<\dfrac{5}{2}\pi$ における方程式 $g(t)=0$ の実数解の個数は **2 個** である．　$\cdots$(答)

(4)　$a=\dfrac{\pi}{(2n+1)^2}$ とおくと $f_n(x)=\dfrac{1}{x}\sin(ax^2)$ であるから，

$$\frac{d}{dx}f_n(x)=-\frac{1}{x^2}\sin(ax^2)+\frac{1}{x}\cos(ax^2)\cdot 2ax$$
$$=-\frac{1}{x^2}\sin(ax^2)+2a\cos(ax^2)\ ,$$
$$\frac{d^2}{dx^2}f_n(x)=\frac{2}{x^3}\sin(ax^2)+\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos(ax^2)\cdot 2ax-2a\sin(ax^2)\cdot 2ax$$
$$=\frac{2-4a^2x^4}{x^3}\sin(ax^2)-\frac{2a}{x}\cos(ax^2)\ .$$

よって，$t=ax^2$ とおくと，

$$x^3\frac{d^2}{dx^2}f_n(x)=2(1-2t^2)\sin t-2t\cos t$$
$$=\boldsymbol{2g(t)}\ .\qquad\cdots(答)$$

(5)　$\dfrac{d^2}{dx^2}f_n(x)$ が符号変化する x が，$0<x<5$ の範囲にちょうど 1 つ存在すればよい．

$t=ax^2=\dfrac{\pi}{(2n+1)^2}x^2$ とおくと，(4) より

$$\frac{d^2}{dx^2}f_n(x)=\frac{2}{x^3}g(t)$$

であるから，$\dfrac{d^2}{dx^2}f_n(x)$ が符号変化する条件は $g(t)$ が符号変化することである．また，x が $0<x<5$ の範囲を単調に増加するとき，t は

$$0<t<\frac{25}{(2n+1)^2}\pi\qquad\cdots②$$

の範囲を単調に増加する．

したがって，$t>0$ で $g(t)$ が符号変化する t の値を小さい順に t_1 , t_2 , t_3 , $\cdots$ とするとき，② の範囲に t_1 が含まれ，かつ，t_2 が含まれなければよい．

(3) の考察および

$$g\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{1}{8\sqrt{2}}(8-9\pi^2+6\pi)<0$$

より，$\dfrac{3}{4}\pi<t_1<\pi<t_2<2\pi$ であることがわかる．

$n=1$ のとき，$\dfrac{25}{(2n+1)^2}=\dfrac{25}{9}>2$ となり，② の範囲に t_2 まで含まれてしまうから不適．

$n=2$ のとき ② は $0<t<\pi$ となり，条件を満たす．

$n\geqq 3$ のとき $\dfrac{25}{(2n+1)^2}\leqq\dfrac{25}{49}<\dfrac{3}{4}$ となり，② の範囲に t_1 が含まれないから不適．

以上より，求める n の値は **2** である．　$\cdots$(答)