I

(1)

$3\cos x-\sqrt{3}\sin x$

$=2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$=2\sqrt{3}\left(\sin x\cos\frac{4\pi}{3}-\cos x\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$=2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{4\pi}{3}\right)$

より

$$A\sin(x-\alpha)=2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{4\pi}{3}\right)$$

が実数$x$に関する恒等式である.

それは, $xy$平面上で,

$y=A\sin(x-\alpha)$ のグラフ

と $y=2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{4\pi}{3}\right)$ のグラフ

が一致することであるから,

$$A=\boxed{2\sqrt{3}},\quad \alpha=\boxed{\frac{4\pi}{3}}.$$

…(ア)　…(イ)

(2) $S_n$ は初項1, 末項$n$, 項数$n$の等差数列の和であるから

$$S_n=\boxed{\frac{n}{2}(n+1)}.\ \cdots(ウ)$$

これより,

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{S_j}=2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)}$

$\displaystyle=2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\boxed{\frac{2n}{n+1}}.\ \cdots(エ)$

$\displaystyle\sum_{p=1}^{2n}(-1)^pS_p$

$\displaystyle=\sum_{l=1}^{n}\left\{(-1)^{2l-1}S_{2l-1}+(-1)^{2l}S_{2l}\right\}$

$\displaystyle=\sum_{l=1}^{n}(S_{2l}-S_{2l-1})$

$\displaystyle=\sum_{l=1}^{n}\{l(2l+1)-l(2l-1)\}$

$\displaystyle=\sum_{l=1}^{n}2l$

$=\boxed{n(n+1)}.\ \cdots(オ)$

(3)

$14x+3y=1.\ \cdots①$

$x=-1$ のとき ① は,

$-14+3y=1$

$y=5.$

よって,

$x=-1,\ y=\boxed{5}$ は ① の解の1つであり,

…(カ)

$14(-1)+3\cdot5=1.\ \cdots②$

①−② より,

$14(x+1)+3(y-5)=0.$

$14(x+1)=-3(y-5).$

14と3は互いに素なので, これを満たす整数$x, y$は,

$$\begin{cases}x+1=3k,\\ 5-y=14k.\end{cases}\quad (k:整数)$$

I

と表せ，①の整数解 $(x, y)$ は，

$$(x, y)=(3k-1, \boxed{-14k+5}) \quad \cdots(キ)$$

（$k$：整数）

$$14x+3y=148. \quad \cdots③$$

②×148より，

$$14(-148)+3\cdot 740=148 \quad \cdots④$$

③−④より

$$14(x+148)+3(y-740)=0.$$

$$14(x+148)=-3(y-740).$$

同様にして考えると，③の整数解 $(x, y)$ は

$$(x, y)=(3l-148, -14l+740).$$

（$l$：整数）

このうち，$x, y$ が正となる整数 $l$ の条件は，

$$3l-148>0 \text{ かつ } -14l+740>0$$

であり，

$$l=50, 51, 52.$$

このもとで，

$$x+y=-11l+592.$$

以上から，この $x+y$ は，

$$x=\overset{\cdots(ク)}{\boxed{2}}, \ y=\overset{\cdots(ケ)}{\boxed{40}} \ (l=50)$$

のときに最大値

$$\boxed{42} \quad \cdots(コ)$$

をとる．

# Ⅱ

(1) $f(x)=\frac{1}{6}(2x^3+3x^2-12x)$ とおく。

$$f'(x)=x^2+x-2$$
$$=(x+2)(x-1)$$

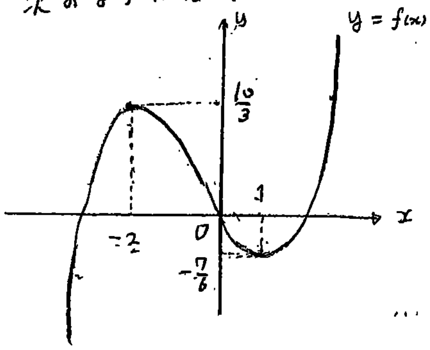
$f(x)$ の増減表は次の通り。

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 極大 | ↘ | 極小 | ↗ |

極大値　$f(-2)=\frac{10}{3}$，　…(答)

極小値　$f(1)=-\frac{7}{6}$　…(答)

(2) $y=f(x)$ のグラフの概形は次のようになる。

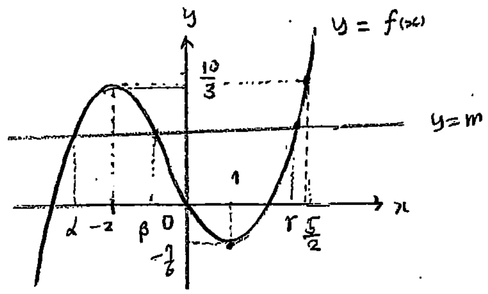



…(答)

(3) $2x^3+3x^2-12x-6m=0$ は

$$f(x)=m$$

と表せる。この方程式が相異なる3つの実数解をもつ条件は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=m$ が相異なる3つの共有点をもつことである。




グラフより，$m$ のとりうる値の範囲は

$$-\frac{7}{6}<m<\frac{10}{3}.\quad\cdots(答)$$

(4) $\gamma$ は $y=f(x)$ と $y=m$ の交点の $x$ 座標のうち最大のものである。

$f(x)=\frac{10}{3}$ とおくと

$$\frac{1}{6}(2x^3+3x^2-12x)=\frac{10}{3}.$$

$$2x^3+3x^2-12x-20=0$$
$$(x+2)^2(2x-5)=0.$$
$$x=-2\ (重解),\ \frac{5}{2}.$$

よって $\gamma$ のとりうる値の範囲は

$$1<\gamma<\frac{5}{2}.\quad\cdots(答)$$

Ⅲ

(1) △ABCが存在するための $a$ の条件は,

$$|2-1| < a < 2+1$$

よって, 求める $a$ の値の範囲は,

$$1 < a < 3 . \cdots ①$$

…(答)

(2)

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A$$

$$= 1\cdot 2\cdot\frac{1^2+2^2-a^2}{2\cdot 1\cdot 2}$$

$$= \frac{1}{2}(5-a^2) . \cdots (答)$$

(3)

$$|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{BO}| = \left(\begin{array}{l}\triangle ABC\text{の外接}\\ \text{円の半径}\end{array}\right)$$

より

$$|\overrightarrow{AO}|^2 = |\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}|^2 .$$

$$|\overrightarrow{AO}|^2 = |\overrightarrow{AO}|^2 - 2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|^2 .$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 = \frac{1}{2} .$$

(AB=1より)

これと, $\overrightarrow{AO} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$, (2)より,

$$s + \frac{5-a^2}{2}t = \frac{1}{2} . \cdots ②$$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2 = 2$ なので同様に考えて,

$$\frac{5-a^2}{2}s + 4t = 2 . \cdots ③$$

①より, $(9-a^2)(a^2-1) > 0$ に注意して,

$$\begin{cases} s = \dfrac{4(a^2-3)}{(9-a^2)(a^2-1)} , \\ t = \dfrac{a^2+3}{(9-a^2)(a^2-1)} . \end{cases} \cdots (答)$$

(4) Oが△ABCの内部にあるための条件は,

$$s>0 \text{ かつ } t>0 \text{ かつ } s+t<1$$

①より, $(9-a^2)(a^2-1) > 0$ に注意して,

$$a^2>3 \text{ かつ } 5a^2-9 < (9-a^2)(a^2-1)$$

$$a^2>3 \text{ かつ } a^2(a^2-5) < 0$$

これと①に注意して, 求める $a$ の値の範囲は,

$$\sqrt{3} < a < \sqrt{5} . \cdots (答)$$