第１問

(1)
$$f'(x)=(-\sin x)\log(\cos x)+(\cos x)\frac{-\sin x}{\cos x}+\sin x+(\cos x)\log(\cos x)$$
$$=(\cos x-\sin x)\log(\cos x)$$

より，$f(x)$ の増減は次のとおり．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

よって，$f(x)$ は $0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ において最小値を持つ．　　(証明終り)

(2)
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2-\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t)\log(\cos t)\,dt$$

であり，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t)\log(\cos t)\,dt=\Big[(\sin t)\log(\cos t)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin t)\frac{-\sin t}{\cos t}\,dt$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\,dt$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos t}-\cos t\right)dt$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}-\cos t\right)dt$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\cos t}{1-\sin t}+\frac{\cos t}{1+\sin t}\right)-\cos t\right\}dt$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2+\left[\frac{1}{2}\{-\log(1-\sin t)+\log(1+\sin t)\}-\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2+\log(\sqrt{2}+1)-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

第１問（つづき）

であるから，求める最小値は，

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2+\log\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\log 2-\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{2}+1\right).$$ …(答)

((2)定積分の別解)

$x=\sin t$ とおくと，

$$\frac{dx}{dt}=\cos t$$

であり，t と x の対応は次のようになる．

t	$0\to\frac{\pi}{4}$
x	$0\to\frac{1}{\sqrt{2}}$

このとき，$\cos t>0$ より $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}$ であるから，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t)\log(\cos t)\,dt&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\log\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\{\log(1+x)+\log(1-x)\}\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[(1+x)\log(1+x)-x-(1-x)\log(1-x)-x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\\&=\frac{1}{2}\left[\log\frac{1+x}{1-x}+x\log(1-x^2)-2x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\\&=\log\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2-\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

第2問

m を正の整数とするとき，2つの整数 a，b について，$a-b$ が m の倍数であることを $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$ と表記する．

(1)　$a_2=a_1^2+1=1^2+1=2$，$a_3=a_2^2+1=2^2+1=5$.

したがって a_3 は5の倍数である．

また，m を正の整数として，a_{3m} が5の倍数であると仮定すると，

$$a_{3m+1}=a_{3m}^2+1\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5).$$

$$a_{3m+2}=a_{3m+1}^2+1\equiv 1^2+1=2\ (\mathrm{mod}\ 5).$$

$$a_{3m+3}=a_{3m+2}^2+1\equiv 2^2+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5).$$

したがって，帰納的に n が3の倍数のとき，a_n は5の倍数である．　(証明終り)

(2)　『正の整数 n，l に対して $a_{n+l}\equiv a_l\ (\mathrm{mod}\ a_n)$ である』…(*)

を l に関する数学的帰納法で示す．

(i)　$l=1$ のとき

$$a_{n+1}=a_n^2+1\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ a_n).$$

したがって，$a_{n+1}\equiv a_1\ (\mathrm{mod}\ a_n)$ であるから，(*) は成り立つ．

(ii)　$l=j$ のときに (*) が成り立つと仮定すると，

$$a_{n+j}\equiv a_j\ (\mathrm{mod}\ a_n).$$

このとき，

$$\begin{aligned} a_{n+j+1}&=a_{n+j}^2+1\\ &\equiv a_j^2+1\\ &=a_{j+1}\ (\mathrm{mod}\ a_n). \end{aligned}$$

したがって，$l=j+1$ のときも (*) が成り立つ．

(i),(ii) より (*) が成り立つ．

(*) より，任意の正の整数 k，m について，

$$a_{(m+1)k}=a_{k+mk}\equiv a_{mk}\ (\mathrm{mod}\ a_k).$$

これを繰り返し用いると，

$$a_{mk}\equiv a_{(m-1)k}\equiv a_{(m-2)k}\equiv\cdots\equiv a_k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ a_k).\qquad\cdots(**)$$

したがって，n が k の倍数のときは a_n は a_k の倍数である．

また，n が k の倍数でないとき，($k\geqq 2$ で) n を k で割った商を q，余りを $r\ (1\leqq r\leqq k-1)$ とおくと，

$$n=kq+r.$$

したがって (*) より，

$$a_n=a_{kq+r}\equiv a_{k(q-1)+r}\equiv a_{k(q-2)+r}\equiv\cdots\equiv a_r\ (\mathrm{mod}\ a_k).\ (r=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)\quad\cdots(***)$$

ここで，漸化式から数列 $\{a_n\}$ は増加数列であるから，$1\leqq r\leqq k-1$ ならば $a_1\leqq a_r\leqq a_{k-1}$ であり a_r が a_k の倍数になることはない．よって，n が k の倍数でないときは a_n は a_k の倍数ではない．

したがって，a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件は，『n が k の倍数』である．　…(答)

第２問（つづき）

(3)　$8091=2022\times 4+3.$

したがって(***)より，

$$a_{8091}\equiv a_3=5\ (\mathrm{mod}\ a_{2022}).$$

$$(a_{8091})^2\equiv 25\ (\mathrm{mod}\ a_{2022}).$$

よって，

$$(a_{8091})^2=a_{2022}\cdot N+25\ (N:\text{整数})$$

と表すことができる．ユークリッドの互除法から，a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数は，a_{2022} と 25 の最大公約数に等しい．

また，$2022=3\cdot 674$ であるから(**)より，

$$a_{2022}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$$

だから a_{2022} は 5 の倍数である．一方，

$$a_1\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 25),\ a_2\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 25),\ a_3\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 25),$$

$$a_4\equiv 26\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 25),\ a_5\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 25),\ \cdots$$

であり，(1) と同様に，正の整数 m を用いて

$$a_{3m-2}\equiv 1,\ a_{3m-1}\equiv 2,\ a_{3m}\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 25)$$

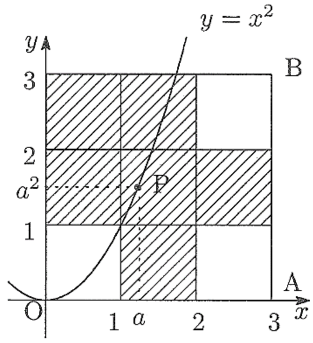
となるので，a_{2022} は 25 の倍数ではない．したがって，a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数は 5.　…(答)

第３問

(1)　D 内で (ii) を満たす点 P の存在領域は右図の斜線部であるから，点 $\mathrm{P}(a, a^2)$ において，$1 \leqq a$ かつ $a^2 \leqq 3$ が必要十分である．

よって，

$$1 \leqq a \leqq \sqrt{3}. \qquad \cdots\cdots 〔答〕$$



(2)　図の斜線部の面積は 6 である．そこから，P を中心とする 1 辺の長さが 2 の正方形の面積 4 を引き，引きすぎた部分の面積を足せば，$f(a)$ を求めることができる．

a^2+1 が 3 より大きいか大きくないかで場合分けすると，次のようになる．

(i)　$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき．左下図より $6-4=2$ に，イ，ロ，ハの長方形の面積を足せばよいので，

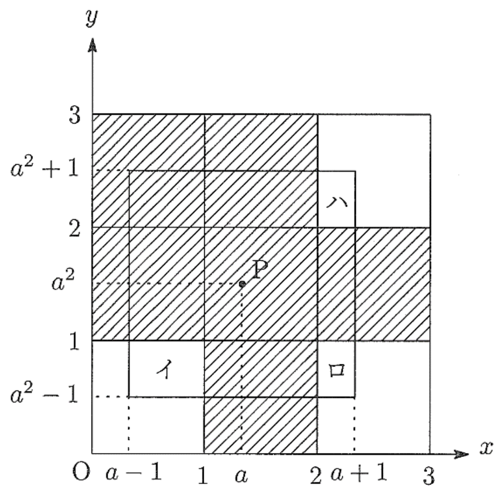
$f(a) = 2 + (2-a)(2-a^2) + (a-1)(2-a^2) + (a-1)(a^2-1) = a^3 - 2a^2 - a + 5.$

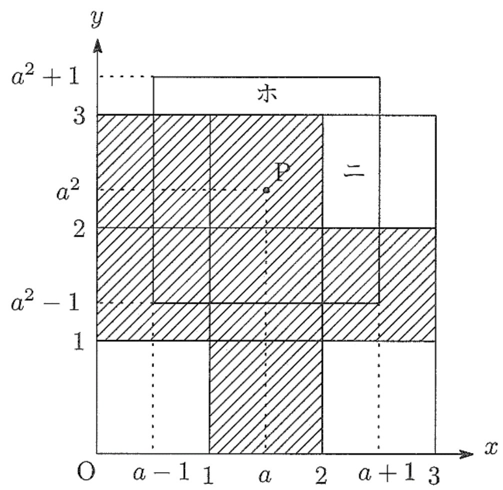
(ii)　$\sqrt{2} < a \leqq \sqrt{3}$ のとき．右下図より $6-4=2$ に，ニ，ホの長方形の面積を足せばよいので，

$f(a) = 2 + (a-1)\cdot 1 + 2(a^2-2) = 2a^2 + a - 3.$

(i), (ii) より

$$f(a) = \begin{cases} a^3 - 2a^2 - a + 5 & (1 \leqq a \leqq \sqrt{2} \text{ のとき}) \\ 2a^2 + a - 3 & (\sqrt{2} < a \leqq \sqrt{3} \text{ のとき}) \end{cases}. \qquad \cdots\cdots 〔答〕$$





(3)　$f(a)$ は $1 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ で連続であり，

$$f'(a) = \begin{cases} 3a^2 - 4a - 1 = 3\left(a - \dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{7}{3} < 5 - 4\sqrt{2} < 0 & (1 < a < \sqrt{2} \text{ のとき}) \\ 4a + 1 > 0 & (\sqrt{2} < a < \sqrt{3} \text{ のとき}) \end{cases}.$$

よって，$f(a)$ は $1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ で単調減少，$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ で単調増加であるから，$f(a)$ を最小とする a は

$$a = \sqrt{2}. \qquad \cdots\cdots 〔答〕$$

第４問

(1)　$\mathrm{P}(a,b)$ とおく．P を通る直線 ℓ が y 軸に平行なとき，ℓ と C が異なる 3 点で交わることはない．よって ℓ は y 軸に平行ではないので，傾きを m とおくと ℓ の方程式は，

$$y=m(x-a)+b$$

である．C の方程式と連立して y を消去すると，

$$x^3-x=m(x-a)+b \quad \text{すなわち} \quad x^3-(m+1)x+am-b=0 \qquad \cdots(*)$$

となる．ℓ と C が異なる 3 点で交わるための条件は，

「$(*)$ を満たす相異なる実数 x が 3 個存在すること」　$\cdots(\sharp)$

である．以下，任意の実数 a と b に対して，$(\sharp)$ を満たす実数 m が存在することを示す．

$(*)$ の左辺を $f(x)$ とおくと，

$$f'(x)=3x^2-(m+1)$$

となる．$m+1 \leqq 0$ のとき，$f'(x) \geqq 0$ より $f(x)$ は単調増加となるので $(\sharp)$ を満たす実数 m はない．$m+1>0$ のとき，

$$f'(x)=3\left(x-\sqrt{\frac{m+1}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{m+1}{3}}\right)$$

となるので，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

また，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ (複号同順) であるから，$(\sharp)$ が成り立つ条件は，極大値と極小値が異符号となることであり，

$$f\left(-\sqrt{\frac{m+1}{3}}\right)f\left(\sqrt{\frac{m+1}{3}}\right)<0$$

$$\left(-\frac{2(m+1)}{3}\sqrt{\frac{m+1}{3}}+am-b\right)\left(\frac{2(m+1)}{3}\sqrt{\frac{m+1}{3}}+am-b\right)<0$$

$$(am-b)^2-\frac{4}{27}(m+1)^3<0 \qquad \cdots ①$$

となる．

$$\lim_{m\to\infty}(①\text{の左辺})=\lim_{m\to\infty} m^3\left\{\frac{1}{m}\left(a-\frac{b}{m}\right)^2-\frac{4}{27}\left(1+\frac{1}{m}\right)^3\right\}=-\infty$$

であるから，任意の実数 a と b に対して，十分大きな実数 m をとれば①を満たす．つまり，任意の実数 a と b に対して，$(\sharp)$ を満たす実数 m は存在する．

以上より，座標平面上のすべての点 P が条件(i)を満たす．

(証明終り)

第４問（つづき１）

(参考)

任意の実数 a と b に対して，(♯) を満たす実数 m が存在することは，次のように示してもよい．

$$f(a-1) = m + (a-1)^3 - (a-1) - b,$$
$$f(a+1) = -m + (a+1)^3 - (a+1) - b$$

であるから，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} f(a\pm 1) = \mp\infty$ (複号同順) である．したがって，a, b の値に関わらず，十分大きな m に対して，

$$f(a-1) > 0, \quad f(a+1) < 0$$

となる．また，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (複号同順) であり，さらに $f(x)$ は連続であるから，中間値の定理より，$f(x) = 0$ となる相異なる実数 x が 3 個存在する．

(2)　(1)より座標平面上の任意の点 P に対して，P を通り C と相異なる 3 点で交わる直線 ℓ が存在するので，ℓ と C の相異なる 3 交点の x 座標を α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ とする．このとき，ℓ の方程式は，2 点 $\left(\alpha, \alpha^3 - \alpha\right)$ と $\left(\gamma, \gamma^3 - \gamma\right)$ を通る直線として

$$y = \frac{(\gamma^3 - \gamma) - (\alpha^3 - \alpha)}{\gamma - \alpha}(x - \alpha) + \alpha^3 - \alpha$$

すなわち，

$$y = \left(\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2 - 1\right)x - \alpha\gamma(\alpha + \gamma)$$

と表すことができる．C と ℓ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しい条件は，

$$\int_\alpha^\beta \left\{x^3 - x - \left(\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2 - 1\right)x + \alpha\gamma(\alpha + \gamma)\right\} dx = \int_\beta^\gamma \left\{\left(\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2 - 1\right)x - \alpha\gamma(\alpha + \gamma) - x^3 + x\right\} dx$$

$$\int_\alpha^\beta \left\{x^3 - \left(\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2\right)x + \alpha\gamma(\alpha + \gamma)\right\} dx + \int_\beta^\gamma \left\{x^3 - \left(\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2\right)x + \alpha\gamma(\alpha + \gamma)\right\} dx = 0$$

$$\int_\alpha^\gamma \left\{x^3 - \left(\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2\right)x + \alpha\gamma(\alpha + \gamma)\right\} dx = 0 \qquad \cdots ②$$

となる．

②の左辺を計算すると，

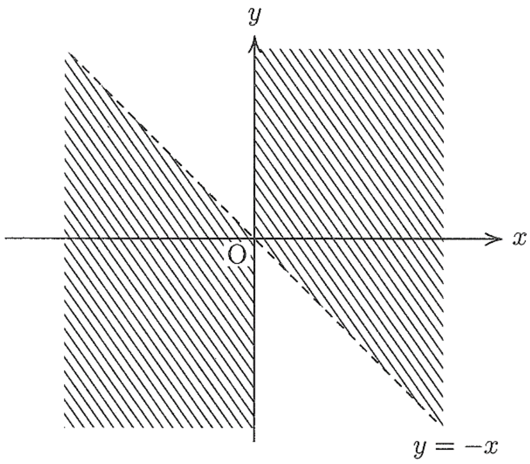
$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\gamma \left\{x^3 - \left(\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2\right)x + \alpha\gamma(\alpha + \gamma)\right\} dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \left(\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2\right)\frac{1}{2}x^2 + \alpha\gamma(\alpha + \gamma)x\right]_\alpha^\gamma \\
&= \frac{1}{4}\left(\gamma^4 - \alpha^4\right) - \left(\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2\right)\frac{1}{2}\left(\gamma^2 - \alpha^2\right) + \alpha\gamma(\alpha + \gamma)(\gamma - \alpha) \\
&= \frac{1}{4}\left(\gamma^2 - \alpha^2\right)\left\{\left(\gamma^2 + \alpha^2\right) - 2\left(\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2\right) + 4\alpha\gamma\right\} \\
&= -\frac{1}{4}\left(\gamma^2 - \alpha^2\right)(\gamma - \alpha)^2 \\
&= -\frac{1}{4}(\gamma + \alpha)(\gamma - \alpha)^3
\end{aligned}$$

となる．

第４問（つづき２）

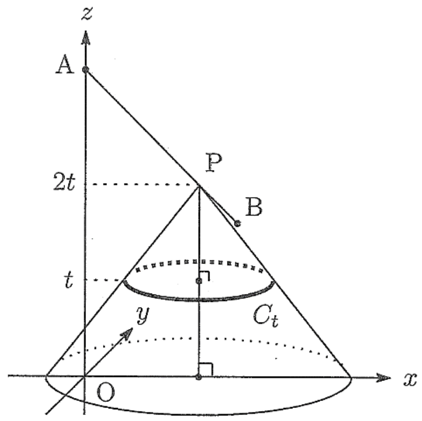
$\gamma-\alpha\neq 0$ に注意すると，②が成り立つ条件は $\gamma+\alpha=0$ である．これより，$\gamma=-\alpha$ であるから，$\alpha<\gamma$ は $\alpha<0$ となり，ℓ の方程式は $y=\left(\alpha^2-1\right)x$ となる．逆に，$\alpha<0$ かつ ℓ の方程式が $y=\left(\alpha^2-1\right)x$ のとき，C と ℓ は $x=0,\pm\alpha$ の異なる３点で交わる．さらに，ℓ と C で囲まれた２つの部分の面積は等しくなり，条件(ii)を満たす．

したがって，実数 α が $\alpha<0$ を満たして動くときの直線 $y=\left(\alpha^2-1\right)x$ が通過する範囲が，求めるべきＰのとりうる範囲である．この直線は原点を通り，傾き α^2-1 のとりうる値の範囲が $\alpha^2-1>-1$ であるから，Ｐのとりうる範囲は次の図の斜線部分 (境界は原点のみ含む) のようになる．



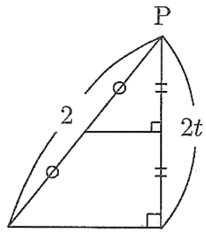
$\cdots$(答)

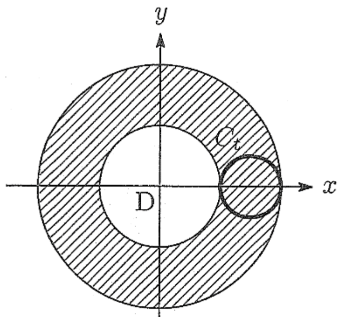
第5問

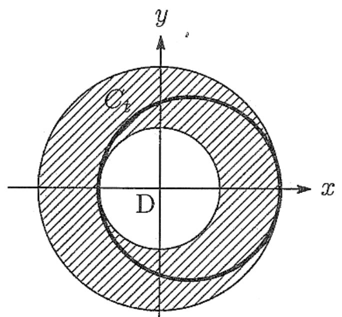


P が線分 AB: $z=2-x \quad (0 \leqq x \leqq 1), y=0$ 上の点 $(2-2t, 0, 2t) \quad \left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right)$ の場合の M の存在領域を考えて，それを z 軸の周りに回転すれば K ができる．

Q は P を中心とする半径 2 の球面と xy 平面の交円を描く．その交円の中心は $(2-2t, 0, 0)$ であり，半径は $\sqrt{2^2-(2t)^2}=2\sqrt{1-t^2}$ となる．(三平方の定理から)．この円を，P を中心に $\dfrac{1}{2}$ に縮小した円 C_t が，M の軌跡である．つまり，C_t は平面 $z=t$ 上にあり，中心は $(2-2t, 0, t)$，半径は $\sqrt{1-t^2}$ となる．







平面 $z=t$ 上で，円 C_t は $\mathrm{D}(0,0,t)$ を含む場合 (上右図)，含まない場合 (上左図) があるが，どちらにしても，D を中心に回転すると，半径 $(2-2t)+\sqrt{1-t^2}$ の円と半径 $|(2-2t)-\sqrt{1-t^2}|$ の円で挟まれた領域になる．これが K を平面 $z=t$ で切った切り口である．その面積を $S(t)$ とおくと，

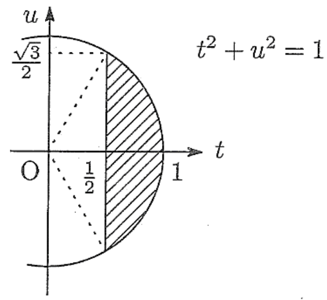
$$\begin{aligned} S(t) &= \pi\left\{(2-2t)+\sqrt{1-t^2}\right\}^2-\pi\left\{(2-2t)-\sqrt{1-t^2}\right\}^2 \\ &= 4\pi(2-2t)\sqrt{1-t^2} \\ &= 8\pi\sqrt{1-t^2}-8\pi t\sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

求める体積 V は，

$$V=\int_{\frac{1}{2}}^{1} S(t)\,dt = 4\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1} 2\sqrt{1-t^2}dt-\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1} 8t\sqrt{1-t^2}dt. \qquad \cdots(*)$$

第 1 項の積分は，右図斜線部の面積であるから，

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$



第 2 項の積分は，

$$\left[-\frac{8}{3}\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=0+\frac{8}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{3}.$$

よって，

第５問（つづき１）

$$
\begin{aligned}
V &= 4\pi\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\pi\sqrt{3}\\
&= \frac{4}{3}\pi^2-2\sqrt{3}\pi.
\end{aligned}
$$

$\cdots$ (答)

(注)　$(*)$ の積分は $t=\sin\theta$　$\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と置換するのも自然である．すると，

$$
\begin{aligned}
(*) &= 8\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\sqrt{1-t^2}\,dt\\
&= 8\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\cos\theta\cdot\cos\theta d\theta\,d\theta\\
&= 8\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-\sin\theta\cos^2\theta)\,d\theta\\
&= 8\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1+\cos 2\theta}{2}+(\cos\theta)'\cos^2\theta\right\}d\theta\\
&= 8\pi\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{(\cos\theta)^3}{3}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\\
&= 8\pi\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\left(0-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{4}\right)+\left(0-\frac{\frac{3\sqrt{3}}{8}}{3}\right)\right\}\\
&= \frac{4}{3}\pi^2-2\sqrt{3}\pi
\end{aligned}
$$

となる．

第５問（つづき２）

注）K の方程式の求め方として，以下の同値変形を行う方法もある。

実数 a, b, c に対して，「$(a, b, c) \in K$」

$\iff$「S 上の点 $P(x, y, z)$ と xy 平面上の点 Q が存在して，
$\begin{cases} \cdot\ PQ \text{ の中点が } (a, b, c) \\ \cdot\ PQ = 2 \end{cases}$ 」

$\iff$「S 上の点 $P(x, y, z)$ が存在して，
$\begin{cases} \cdot\ (2a-x,\ 2b-y,\ 2c-z) \text{ が } xy \text{ 平面上にある。} \\ \cdot\ P(x, y, z) \text{ と } (a, b, c) \text{ の距離が } \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$ 」

$\iff$「S 上の点 $P(x, y, z)$ が存在して，
$\begin{cases} \cdot\ 2c - z = 0 \\ \cdot\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 1 \end{cases}$ 」

$\iff$「S 上の点 $P(x, y, 2c)$ が存在して，
$(x-a)^2 + (y-b)^2 + c^2 = 1$ 」

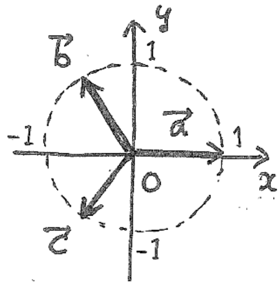
$\overset{㊟}{\iff}$「$1 \leqq 2c \leqq 2$ かつ，
$x^2 + y^2 = (2-2c)^2$ と $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1 - c^2$ が共有点を持つ。」
（xy 平面で２円が共有点を持つ条件を考えた。）

$\iff$「$\frac{1}{2} \leqq c \leqq 1$ かつ，$\left|(2-2c) - \sqrt{1-c^2}\right| \leqq \sqrt{a^2+b^2} \leqq (2-2c) + \sqrt{1-c^2}$ 」
（三角不等式）

（㊟ここで
$S = \{(x, y, z) \mid 1 \leqq z \leqq 2,\ x^2 + y^2 = (2-z)^2\}$ であることを用いた。）

このことを用いて，K を $z = t$ で切った切り口が，半径 $\left|(2-2t) - \sqrt{1-t^2}\right|$ の円と半径 $(2-2t) + \sqrt{1-t^2}$ の円で挟まれた領域になることを示すこともできる。

第６問



$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\vec{c}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

とする．これらを何個かずつ加えたものが $\overrightarrow{OX_N}$ である．

つまり，α，β，γ を 0 以上の整数として

$$\overrightarrow{OX_N}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$$

と表せる．ここで，X_N が O にある，つまり $\overrightarrow{OX_N}=\vec{0}$ となるとき，y 成分に注目すると $\beta=\gamma$ が必要で，さらに x 成分に注目すると $\alpha=\beta=\gamma$ が必要である．逆に $\alpha=\beta=\gamma$ のとき $\overrightarrow{OX_N}=\alpha(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{0}$ となる．つまり，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の向きの移動は同じ回数だけ起こり，コインを N 回投げたとき表の出る回数は 3 の倍数である．

$\overrightarrow{v_{3l-3}}=\overrightarrow{a_l}$，$\overrightarrow{v_{3l-2}}=\overrightarrow{b_l}$，$\overrightarrow{v_{3l-1}}=\overrightarrow{c_l}$ $(l=1,2,3,\cdots)$ とし，裏が出ることを順に Y_1，Y_2，$Y_3\cdots$ と表すことにする．

(1) X_8 が O にあるのは次の場合がある．

(ア) 表の出る回数が 0 のとき，

表・裏の出方は $Y_1Y_2\cdots Y_8$ の 1 通り

(イ) 表の出る回数が 3 のとき，

$\overrightarrow{a_l}$，$\overrightarrow{b_l}$，$\overrightarrow{c_l}$ の移動が起こる場所を表中に○で表すと次の通り

$\overrightarrow{a_1}$ か $\overrightarrow{a_2}$ に○をひとつ，$\overrightarrow{b_1}$ か $\overrightarrow{b_2}$ に○をひとつ，$\overrightarrow{c_1}$ か $\overrightarrow{c_2}$ に○をひとつ並べると考える．

$\overrightarrow{a_1}$	Y_1	$\overrightarrow{b_1}$	Y_2	$\overrightarrow{c_1}$	Y_3	$\overrightarrow{a_2}$	Y_4	$\overrightarrow{b_2}$	Y_5	$\overrightarrow{c_2}$
○		○		○						
○		○								○
○				○				○		
○								○		○
		○		○		○				
		○				○				○
				○		○		○		
						○		○		○

よって，$({}_2C_1)^3=8$ 通りの表裏の出方がある．

第６問（つづき１）

(ウ) 表の出る回数が 6 のとき
表裏の出方は右のように 1 通り

$\overrightarrow{a_1}$	Y_1	$\overrightarrow{b_1}$	Y_2	$\overrightarrow{c_1}$
○○		○○		○○

(ア)(イ)(ウ)より 計 10 通りの表・裏の出方があり X_8 が O にある確率は

$$\frac{10}{2^8}=\frac{5}{128} \quad \cdots(答)$$

(2) $r=3m$ ($m=0,1,2,\cdots,66$) とおくと，裏は $200-3m$ 回出る．(1)と同様に考えて，

$$\overrightarrow{a_1}Y_1\overrightarrow{b_1}Y_2\overrightarrow{c_1}Y_3\overrightarrow{a_2}Y_4\overrightarrow{b_2}Y_5\cdots Y_{3(67-m)-2}\overrightarrow{b_{67-m}}Y_{3(67-m)-1}\overrightarrow{c_{67-m}}$$

の並びの $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_{67-m}}$ に○を m 個，$\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \cdots, \overrightarrow{b_{67-m}}$ に○を m 個，$\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \cdots, \overrightarrow{c_{67-m}}$ に○を m 個並べる並べ方の総数を求める．

$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_{67-m}}$ に○を m 個並べる並べ方は，1, 2, …, $67-m$ から重複を許して m 個 ~~選ぶ~~ 選び方の総数に等しく，これは

$$\underbrace{○○\cdots○}_{m個}\ \underbrace{||\cdots|}_{66-m本}$$

の並べ方を考えて ${}_{m+66-m}C_m={}_{66}C_m$ 通りある．他の場合も同様なので

$$p_{3m}=\frac{({}_{66}C_m)^3}{2^{200}}$$

$r\neq 3m$ のとき X_{200} は O になく，求める確率は

$$p_r=\begin{cases}\dfrac{\left({}_{66}C_{\frac{r}{3}}\right)^3}{2^{200}} & (r\text{ が }3\text{ の倍数})\\ 0 & (r\text{ が }3\text{ の倍数以外})\end{cases} \quad \cdots(答)$$

さらに $p_{3(m+1)}\geqq p_{3m}$ となる m を考えると

$$\left\{\frac{66!}{(m+1)!\,(66-(m+1))!}\right\}^3\frac{1}{2^{200}}\geqq\left\{\frac{66!}{m!\,(66-m)!}\right\}^3\frac{1}{200}$$ なら

$(m+1)!\,(66-(m+1))!\leqq m!\,(66-m)!$ すなわち $m+1\leqq 66-m$ より $m\leqq\dfrac{65}{2}$

$m=0,1,\cdots,32$ のとき $p_{3(m+1)}>p_{3m}$，$m=33,34,\cdots,65$ のとき $p_{3(m+1)}<p_{3m}$

なら $$p_0<p_{3\cdot1}<p_{3\cdot2}<\cdots<p_{3\cdot32}<p_{3\cdot33}>p_{3\cdot34}>\cdots p_{3\cdot66}$$

よって，p_r が最大となる r は $r=3\cdot33=99$ $\cdots$(答)

第６問（つづき２）

《参考》　r が 3 の倍数のとき

$$p_r = \left\{ \frac{66!}{\left(\frac{r}{3}\right)!\left(66-\frac{r}{3}\right)!} \right\}^3 \frac{1}{2^{200}}$$

と表すこともできる．