文学部、教育学部、法学部、経済学部、情報学部（人間・社会情報学科）

1

(1) $(x-a)^2 = x^2-2ax+a^2$.

$$
\begin{array}{r}
x \quad +2a \\
x^2-2ax+a^2 \,\overline{)\, x^3 \qquad\qquad\qquad} \\
\underline{x^3-2ax^2+a^2x} \\
2ax^2-a^2x \\
\underline{2ax^2-4a^2x+2a^3} \\
3a^2x-2a^3
\end{array}
$$

上の筆算より，求める余りは，

$3a^2x-2a^3$. …(答)

(2)

$$
\begin{array}{r}
x \quad -\alpha \\
x^2+\alpha x+\beta \,\overline{)\, x^3 \qquad\qquad\qquad} \\
\underline{x^3+\alpha x^2 \quad +\beta x} \\
-\alpha x^2 \quad -\beta x \\
\underline{-\alpha x^2 \quad -\alpha^2 x -\alpha\beta} \\
(\alpha^2-\beta)x+\alpha\beta
\end{array}
$$

上の筆算より，$f(x)$ で x^3 を割った余りが $3x+b$ であるとき，

$$
\begin{cases}
\alpha^2-\beta = 3, & \cdots ① \\
\alpha\beta = b & \cdots ②
\end{cases}
$$

が成り立つので，b の値に応じた $f(x)$ の個数は，①②をともに満たす実数 α,β の組 (α,β) の個数に一致する．

$$
「①かつ②」\iff
\begin{cases}
\beta = \alpha^2-3, & \cdots ③ \\
\alpha(\alpha^2-3) = b & \cdots ④
\end{cases}
$$

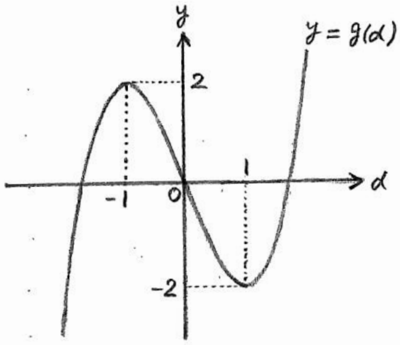
であり，1つの実数 α に対して③より実数 β はただ1つに定まるので，求めるものは，④を満たす異なる実数 α の個数である．

④の左辺を $g(\alpha)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
g(\alpha) &= \alpha^3-3\alpha, \\
g'(\alpha) &= 3\alpha^2-3 \\
&= 3(\alpha+1)(\alpha-1)
\end{aligned}
$$

より，α の変化による $g(\alpha)$ の増減および $y=g(\alpha)$ のグラフは次のようになる．

α	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(\alpha)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(\alpha)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$



曲線 $y=g(\alpha)$ と直線 $y=b$ の共有点の個数を考えることにより，求める個数は，

$$
\begin{cases}
b<-2,\ 2<b & のとき\ 1個, \\
b=\pm 2 & のとき\ 2個, \\
-2<b<2 & のとき\ 3個.
\end{cases}
\quad \cdots(答)
$$

数学（文系）

文学部、教育学部、法学部、経済学部、情報学部（人間・社会情報学科）

2

1回目，2回目の目の数を掛けた値 ab を表にすると次の通り．

b \ a	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

(1) C の値で場合分けをする．

(ア) $C=1$ のとき

すべての (a,b) の組で成立するから 36通り．

(イ) $C=2$ のとき　$ab \leqq 4$．

これを満たす (a,b) の組は

$(a,b)=(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)$

$(1,3),(3,1),(1,4),(4,1)$ の8通り．

(ウ) $C=3$ のとき　$ab \leqq 3$．

これを満たす (a,b) の組は

$(a,b)=(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)$

の5通り．

(エ) $C=4$ のとき　$ab \leqq \frac{8}{3}=2+\frac{2}{3}$．

これを満たす (a,b) の組は

$(a,b)=(1,1),(1,2),(2,1)$ の3通り．

(オ) $C=5$ のとき　$ab \leqq \frac{5}{2}=2+\frac{1}{2}$．

これを満たす (a,b) の組は

$(a,b)=(1,1),(1,2),(2,1)$ の3通り．

(カ) $C=6$ のとき　$ab \leqq \frac{12}{5}=2+\frac{2}{5}$．

これを満たす (a,b) の組は

$(a,b)=(1,1),(1,2),(2,1)$ の3通り．

(ア)～(カ)より，求める確率は

$$\frac{36+8+5+3+3+3}{6^3}=\frac{29}{108}.\quad \cdots(\text{答})$$

(2) $ab+2C$ と $2abC$ が互いに素のとき ab は奇数である．

(ア) $(a,b)=(1,1)$ のとき条件を満たす C の値は

$C=1,2,3,4,5,6$　の6通り．

(イ) $(a,b)=(1,3),(3,1)$ のとき条件を満たす C の値は

$C=1,2,4,5$　の4通り．

(ウ) $(a,b)=(3,3)$ のとき条件を満たす C の値は

$C=1,2,4,5$　の4通り．

(エ) $(a,b)=(1,5),(5,1)$ のとき条件を満たす C の値は

$C=1,2,3,4,6$　の5通り．

(オ) $(a,b)=(3,5),(5,3)$ のとき条件を満たす C の値は

$C=1,2,4$　の3通り．

(カ) $(a,b)=(5,5)$ のとき条件を満たす C の値は

$C=1,2,3,4,6$　の5通り．

(ア)～(カ)より，求める確率は

$$\frac{6+4\times2+4+5\times2+3\times2+5}{6^3}=\frac{13}{72}.\quad \cdots(\text{答})$$

文学部、教育学部、法学部、経済学部、情報学部（人間・社会情報学科）

3

$f(x)=\frac{1}{2}x^2$，$g(x)=-(x-a)^2+b$ とする．

(1) C_1 と C_2 が異なる2点で交わるのは，x の2次方程式

$$f(x)-g(x)=0,$$

$$x^2-\frac{4}{3}ax+\frac{2}{3}(a^2-b)=0 \quad \cdots①$$

が異なる2つの実数解をもつ，すなわち①の判別式を D として $D>0$ のときである．

$$D=\frac{16}{9}a^2-4\cdot\frac{2}{3}(a^2-b)$$

$$=-\frac{8}{9}a^2+\frac{8}{3}b \quad \cdots②$$

であるから，$D>0$ より

$$-\frac{8}{9}a^2+\frac{8}{3}b>0.$$

$$b>\frac{1}{3}a^2. \quad \cdots(答)$$

(2) ①の異なる2つの実数解を α, β $(\alpha<\beta)$ とする．このとき，

$$f(x)-g(x)=\frac{3}{2}(x-\alpha)(x-\beta)$$

が成り立つ．

$\alpha<x<\beta$ において

$$\frac{3}{2}(x-\alpha)(x-\beta)<0,$$

$$f(x)<g(x)$$

であるから，

$$S=\int_\alpha^\beta\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=-\frac{3}{2}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3. \quad \cdots③$$

よって，$S=16$ のとき，

$$(\beta-\alpha)^3=64=4^3.$$

$\beta-\alpha$ は実数だから

$$\beta-\alpha=4.$$

①を解いて

$$\alpha=\frac{2}{3}a-\frac{\sqrt{D}}{2}, \quad \beta=\frac{2}{3}a+\frac{\sqrt{D}}{2}$$

を得るから，

$$\beta-\alpha=\sqrt{D}. \cdots ④$$

よって，$\beta-\alpha=4$ のとき，

$$D=16.$$

$$-\frac{8}{9}a^2+\frac{8}{3}b=16. \quad (②より)$$

$$b=\frac{1}{3}a^2+6. \quad \cdots(答)$$

（これは，(1)で求めた条件を満たす．）

(3) ③，④より $S=\frac{1}{4}(\sqrt{D})^3$ なので，S が最大となるのは，D が最大のときである．

a, b が $b\leqq a+3$ を満たすとき，

$$D=-\frac{8}{9}a^2+\frac{8}{3}b \quad (②より)$$

$$\leqq-\frac{8}{9}a^2+\frac{8}{3}(a+3)$$

$$=-\frac{8}{9}\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+10$$

$$\leqq 10.$$

$D=10$ となるとき，$b=a+3$ かつ $a=\frac{3}{2}$

すなわち $(a, b)=\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

（これは(1)で求めた条件を満たす．）

したがって，求める S の最大値は

$$\frac{1}{4}(\sqrt{10})^3$$

$$=\frac{5\sqrt{10}}{2}. \quad \cdots(答)$$