数学（理系）

名古屋大学　（前期）1 / 4

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

$\boxed{1}$

(1) $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$.

$$
\begin{array}{r}
x+2a \\
x^2-2ax+a^2\;\big)\;x^3 \qquad\qquad\qquad\\
x^3-2ax^2+a^2x \qquad \\
2ax^2-a^2x \qquad \\
2ax^2-4a^2x+2a^3 \\
3a^2x-2a^3
\end{array}
$$

上の筆算より，求める余りは，

$3a^2x-2a^3$. $\cdots$(答)

(2)

$$
\begin{array}{r}
x-\alpha \\
x^2+\alpha x+\beta\;\big)\;x^3 \qquad\qquad\qquad\\
x^3+\alpha x^2+\beta x \qquad \\
-\alpha x^2-\beta x \qquad \\
-\alpha x^2-\alpha^2 x-\alpha\beta \\
(\alpha^2-\beta)x+\alpha\beta
\end{array}
$$

上の筆算より，$f(x)$でx^3を割った余りが$3x+b$であるとき，

$$
\begin{cases}
\alpha^2-\beta=3, & \cdots ① \\
\alpha\beta=b & \cdots ②
\end{cases}
$$

が成り立つので，bの値に応じた$f(x)$の個数は，①②をともに満たす実数α,βの組(α,β)の個数に一致する.

「①かつ②」$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\alpha^2-3, & \cdots ③ \\ \alpha(\alpha^2-3)=b & \cdots ④ \end{cases}$

であり，1つの実数αに対して③より実数βはただ1つに定まるので，求めるものは，④を満たす異なる実数αの個数である.

④の左辺を$g(\alpha)$とおくと，

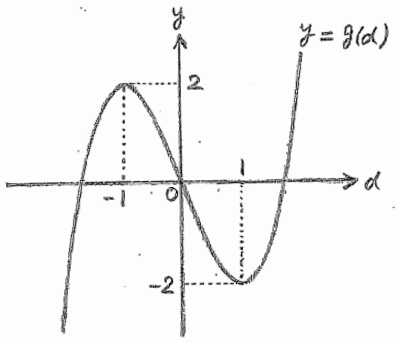
$g(\alpha)=\alpha^3-3\alpha$,

$g'(\alpha)=3\alpha^2-3$

$\quad=3(\alpha+1)(\alpha-1)$

より，αの変化による$g(\alpha)$の増減および$y=g(\alpha)$のグラフは次のようになる.

α	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(\alpha)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(\alpha)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$



曲線$y=g(\alpha)$と直線$y=b$の共有点の個数を考えることにより，求める個数は，

$$
\begin{cases}
b<-2,\ 2<b & \text{のとき 1個}, \\
b=\pm 2 & \text{のとき 2個}, \\
-2<b<2 & \text{のとき 3個}.
\end{cases}
\cdots\text{(答)}
$$

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部(自然情報学科、コンピュータ科学科)

2

1回目，2回目の目の数を掛けた値 ab を表にすると次の通り．

b＼a	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

(1) c の値で場合分けをする．

(ア) $c=1$ のとき

すべての (a,b) の組で成立するから 36通り．

(イ) $c=2$ のとき　$ab \leqq 4$．

これを満たす (a,b) の組は

$(a,b)=(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)$

$(1,3),(3,1),(1,4),(4,1)$ の8通り．

(ウ) $c=3$ のとき　$ab \leqq 3$．

これを満たす (a,b) の組は

$(a,b)=(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)$

の5通り．

(エ) $c=4$ のとき　$ab \leqq \frac{8}{3}=2+\frac{2}{3}$．

これを満たす (a,b) の組は

$(a,b)=(1,1),(1,2),(2,1)$ の3通り．

(オ) $c=5$ のとき　$ab \leqq \frac{5}{2}=2+\frac{1}{2}$．

これを満たす (a,b) の組は

$(a,b)=(1,1),(1,2),(2,1)$ の3通り．

(カ) $c=6$ のとき　$ab \leqq \frac{12}{5}=2+\frac{2}{5}$．

これを満たす (a,b) の組は

$(a,b)=(1,1),(1,2),(2,1)$ の3通り．

(ア)〜(カ)より，求める確率は

$$\frac{36+8+5+3+3+3}{6^3}=\frac{29}{108}．\quad \cdots(答)$$

(2) $ab+2c$ と $2abc$ が互いに素のとき ab は奇数である．

(ア) $(a,b)=(1,1)$ のとき条件を満たす c の値は

$c=1,2,3,4,5,6$　の6通り．

(イ) $(a,b)=(1,3),(3,1)$ のとき条件を満たす c の値は

$c=1,2,4,5$　の4通り．

(ウ) $(a,b)=(3,3)$ のとき条件を満たす c の値は

$c=1,2,4,5$　の4通り．

(エ) $(a,b)=(1,5),(5,1)$ のとき条件を満たす c の値は

$c=1,2,3,4,6$　の5通り．

(オ) $(a,b)=(3,5),(5,3)$ のとき条件を満たす c の値は

$c=1,2,4$　の3通り．

(カ) $(a,b)=(5,5)$ のとき条件を満たす c の値は

$c=1,2,3,4,6$　の5通り．

(ア)〜(カ)より，求める確率は

$$\frac{6+4\times2+4+5\times2+3\times2+5}{6^3}=\frac{13}{72}．\quad \cdots(答)$$

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部(自然情報学科、コンピュータ科学科)

3

$0 \leqq \arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) \leqq \pi$, …①

$4\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0$, …②

$2\gamma^2 - (3\alpha+\beta+2)\gamma + (\alpha+1)(\alpha+\beta) = 0$. …③

(1) ②の両辺を $\alpha^2 (\neq 0)$ で割って,

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2\cdot\frac{\beta}{\alpha} + 4 = 0.$$

①より $\dfrac{\beta}{\alpha}$ の虚部は0以上であるから,

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1+\sqrt{3}i. \quad \cdots(答)$$

$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = 2$ より $|\beta| = 2|\alpha|$ であるから, α, β が正六角形OABCDEの頂点のとき,

(ア) A(α), C(β), または,

(イ) E(α), C(β) のいずれか

であるが, このうち①を満たすのは(ア)に限る.

よって, α は頂点A, β は頂点C. …(答)

(2) ③より,

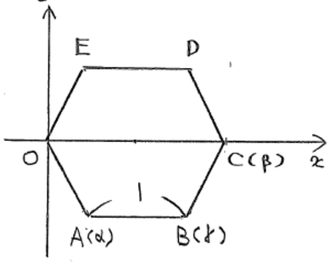
$$\{\gamma-(\alpha+1)\}\{2\gamma-(\alpha+\beta)\} = 0.$$

$$\gamma = \alpha+1,\ \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ のとき, γ は線分ACの中点であり, 正六角形の頂点にならないので不適.

$\gamma = \alpha+1$ のとき, γ は α を実軸方向に1だけ平行移動した点である. γ が頂点B, D, Eの場合を考える.

(i) γ が頂点Bのとき.

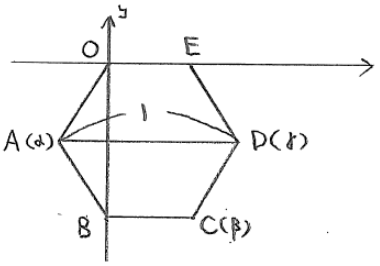


…(答)

このとき,

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 2,\ \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right). \quad \cdots(答)$$

(ii) γ が頂点Dのとき.

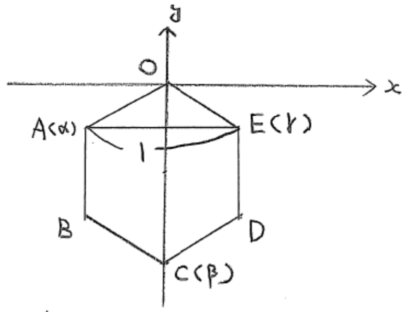


…(答)

このとき,

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right). \quad \cdots(答)$$

(iii) γ が頂点Eのとき.



…(答)

このとき,

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right). \quad \cdots(答)$$

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

4

(1) $f(x)$は$x \geqq 0$で連続な増加関数より，$0 \leqq x \leqq 2-\frac{1}{n}$において，

$\frac{f(x)}{2-x} \geqq \frac{f(0)}{2-x} = \frac{1}{2-x}$であるから，

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx \geqq \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{1}{2-x}dx$$
$$= \left[-\log(2-x)\right]_0^{2-\frac{1}{n}}$$
$$= -\log\frac{1}{n} + \log 2$$
$$= \log 2n.$$

$\lim_{n \to \infty} \log 2n = \infty$であるから，

$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx = \infty$.（証明終り）

(2) $f(x)$は$x \geqq 0$で連続な増加関数より，$y \geqq 2+\frac{1}{n}$のとき，$2+\frac{1}{n} \leqq x \leqq y$において$\frac{f(x)}{x-2} > \frac{f(0)}{x-2} = \frac{1}{x-2}$であるから，

$$F_n(y) \geqq \int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{1}{x-2}dx$$
$$= \left[\log(x-2)\right]_{2+\frac{1}{n}}^{y}$$
$$= \log(y-2) - \log\frac{1}{n}$$
$$\longrightarrow \infty.\ (y \to \infty)$$

よって，$\lim_{y \to \infty} F_n(y) = \infty$.（証明終り）

また$g(y) = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{f(x)}{2-x}dx$

とおくと，$g(y) = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx - F_n(y)$

であり，$y \geqq 2+\frac{1}{n}$のとき，$f(y) > 0$より，

$g'(y) = -F_n'(y) = -\frac{f(y)}{y-2} < 0$.

よって，$y \geqq 2+\frac{1}{n}$で$g(y)$は減少関数である．

これと$\lim_{y \to \infty} g(y) = -\infty$および

$g\left(2+\frac{1}{n}\right) = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx \geqq \log 2n > 0$

と$g(y)$が$y \geqq 2+\frac{1}{n}$で連続であることより，$y > 2+\frac{1}{n}$において，$g(y)=0$を満たす実数yがただ1つ存在する．

ゆえに題意は示された．（証明終り）

(3)
$$g(4) = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)}{2-x}dx.$$

$I = \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)}{2-x}dx$において，$x = 4-t$とおく．

$\frac{dx}{dt} = -1$

x	$2+\frac{1}{n} \to 4$
t	$2-\frac{1}{n} \to 0$

このとき，

$$I = \int_{2-\frac{1}{n}}^{0} \frac{f(4-t)}{t-2} \cdot (-1)dt$$
$$= \int_0^{2-\frac{1}{n}} \left\{-\frac{f(4-t)}{2-t}\right\}dt = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \left\{-\frac{f(4-x)}{2-x}\right\}dx.$$

したがって，

$$g(4) = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)-f(4-x)}{2-x}dx.$$

$f(x)$は$x \geqq 0$で増加関数であり，$0 \leqq x \leqq 2-\frac{1}{n}$のとき$x < 4-x$であるから，$f(x) < f(4-x)$.

よって，$g(4) < 0$となるから，(2)より，$g(y)=0$を満たす実数yは$y < 4$を満たす．したがって，(2)のa_nについて，$a_n < 4$となる．（証明終り）