$\boxed{1}$

$2^{11}=2048$ であるから,

$$\log_4 2022 < \log_4 2048$$
$$= \frac{\log_2 2^{11}}{\log_2 4}$$
$$= \frac{11}{2} \quad (=5.5)$$

また,

$$\log_4 2022 > \log_4 2000$$
$$= \frac{\log_{10}(2\times 10^3)}{\log_{10}4}$$
$$= \frac{\log_{10}2+3}{2\log_{10}2}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2\log_{10}2}$$
$$> 0.5 + \frac{3}{2\times 0.3011}$$
$$= 0.5 + 4.98\cdots$$
$$> 5.4.$$

よって,

$$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$$

（証明終り）

2

P_n が D, E, F のいずれかとなる経路の総数を b_n とする．

P_n が A, B, C のいずれかであるとき，

- P_{n+1} が A, B, C のいずれかである辺 P_nP_{n+1} は 2本ある．
- P_{n+1} が D, E, F のいずれかである辺 P_nP_{n+1} は 1本ある．

よって，$n=1,2,3,\cdots$ において

$$a_{n+1}=2a_n+b_n. \quad \cdots①$$

同様に，$n=1,2,3,\cdots$ において

$$b_{n+1}=2b_n+a_n. \quad \cdots②$$

①＋②より

$$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n).$$

これと $a_1=2$, $b_1=1$ より

$$a_n+b_n=(a_1+b_1)\cdot 3^{n-1}$$
$$=3^n. \quad \cdots③$$

①－②より

$$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n.$$

これと $a_1=2$, $b_1=1$ より

$$a_n-b_n=a_1-b_1$$
$$=1. \quad \cdots④$$

③，④より

$$a_n=\frac{1}{2}(3^n+1). \quad \cdots(答)$$

（注）

どの頂点も，通る辺は3本あることから③を導くこともできる．

$\boxed{3}$ C と L_1, L_2 との接点の x 座標をそれぞれ $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ として考える。

$y=\dfrac{x^2}{4}$ のとき，$y'=\dfrac{x}{2}$ なので

$L_1: y=\dfrac{\alpha}{2}(x-\alpha)+\dfrac{\alpha^2}{4}$

すなわち，

$$L_1: y=\frac{\alpha}{2}x-\frac{\alpha^2}{4} \quad \cdots ①$$

同様にして，

$$L_2: y=\frac{\beta}{2}x-\frac{\beta^2}{4} \quad \cdots ②$$

L_1, L_2 は直交するので

$$\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\beta}{2}=-1$$

$$\alpha\beta=-4 \quad \cdots ③$$

また，①と②を連立すると，

$$\frac{\alpha}{2}x-\frac{\alpha^2}{4}=\frac{\beta}{2}x-\frac{\beta^2}{4}$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2}x=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{4}$$

$\alpha\neq\beta$ より

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

L_1, L_2 の交点の x 座標は $\dfrac{3}{2}$ であるから，

$$\alpha+\beta=3 \quad \cdots ④$$

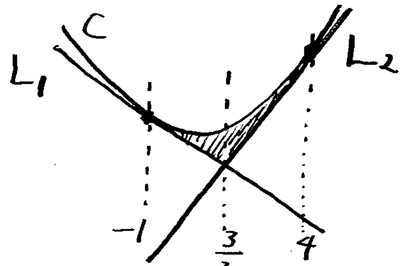
③，④より，α と β は t の2次方程式

$$t^2-3t-4=0$$

の2解である。

よって，

$$\alpha=-1, \quad \beta=4 \quad \cdots ⑤$$



求める面積を S とすると，

①，②に⑤を代入して，

$$S=\int_{-1}^{\frac{3}{2}}\left\{\frac{x^2}{4}-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx+\int_{\frac{3}{2}}^{4}\left\{\frac{x^2}{4}-(2x-4)\right\}dx$$

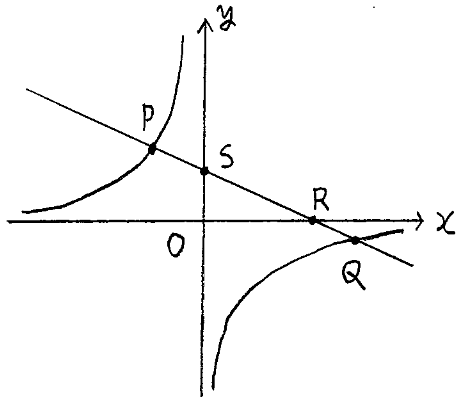
$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{\frac{3}{2}}(x+1)^2dx+\frac{1}{4}\int_{\frac{3}{2}}^{4}(x-4)^2dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}(x-4)^3\right]_{\frac{3}{2}}^{4}$$

$$=\frac{125}{96}+\frac{125}{96}$$

$$=\frac{125}{48} \quad \cdots（答）$$

$\boxed{4}$



点Sのx座標は0.

$ax+by=1$ で $y=0$ とすると $x=\frac{1}{a}$ であるから，点Rのx座標は $\frac{1}{a}$.

連立方程式

$$\begin{cases} ax+by=1, \\ y=-\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

を解くと

$$(x,y)=\left(\frac{1\pm\sqrt{1+4ab}}{2a},\ \frac{1\mp\sqrt{1+4ab}}{2b}\right).$$

（複号同順）

Pのy座標は正，Qのy座標は負であるから

点Pのx座標は $\dfrac{1-\sqrt{1+4ab}}{2a}$,

点Qのx座標は $\dfrac{1+\sqrt{1+4ab}}{2a}$.

4点P, S, R, Qは同一直線上にあるから

$$\frac{PQ}{RS}=\frac{\dfrac{1+\sqrt{1+4ab}}{2a}-\dfrac{1-\sqrt{1+4ab}}{2a}}{\dfrac{1}{a}-0}$$

$$=\sqrt{1+4ab}.$$

$\dfrac{PQ}{RS}=\sqrt{2}$ より

$$\sqrt{1+4ab}=\sqrt{2}$$

すなわち

$$ab=\frac{1}{4}.\ \cdots①$$

ここでPQの中点の座標を(X,Y)とすると

$$X=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{1+4ab}}{2a}+\frac{1+\sqrt{1+4ab}}{2a}\right)$$

$$=\frac{1}{2a}$$

より

$$a=\frac{1}{2X}.$$

また

$$Y=\frac{1}{b}(1-aX)=\frac{1}{2b}$$

より

$$b=\frac{1}{2Y}.$$

①, $a>0$, $b>0$ より

$$\frac{1}{2X}\cdot\frac{1}{2Y}=\frac{1}{4},\ \frac{1}{2X}>0,\ \frac{1}{2Y}>0$$

すなわち

$$XY=1,\ X>0.$$

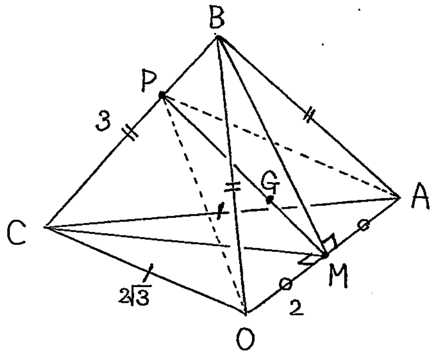
したがって，求める軌跡は

曲線 $xy=1$ $(x>0)$.

…（答）

$\boxed{5}$

(1) 辺OAの中点をMとする．



$\triangle OAB$，$\triangle OAC$ はそれぞれ $OB=AB$，$OC=AC$ の二等辺三角形だから，

$BM\perp OA$，$CM\perp OA$

より，(平面BCM)$\perp OA$．

よって，$PM\perp OA$．

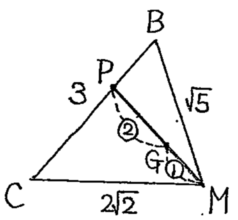
Gは $\triangle OAP$ の重心だから，中線PMを $2:1$ に内分する．

したがって，$\overrightarrow{PG}\perp\overrightarrow{OA}$．

(2) 直角三角形OMB，OMCに着目して，

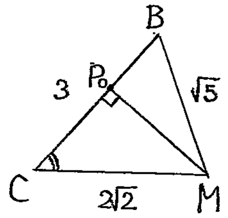
$MB=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$，

$MC=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$．



BCが最大辺であり，$3^2<(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{5})^2$ より，$\triangle MBC$ は鋭角三角形である．

$PG=\frac{2}{3}PM$ より，Pが辺BC上を動くとき，PGが最小となるのは，PMが最小となるときであり，それは $PM\perp BC$ のときである．そのときのPを P_0 とする．



$\triangle MBC$ に余弦定理を用いると

$$\cos\angle MCB=\frac{3^2+(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot3\cdot2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ゆえに，$\angle MCB=45^\circ$．

よって，

$$P_0M=MC\sin\angle MCB$$
$$=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=2.$$

したがって，

$$(\text{PGの最小値})=\frac{2}{3}P_0M$$
$$=\frac{4}{3}.\quad\cdots(\text{答})$$