$\boxed{1}$

$2^{11}=2048$ であるから，

$$\log_4 2022 < \log_4 2048 = \frac{\log_2 2^{11}}{\log_2 4} = \frac{11}{2} \ (=5.5)$$

また，

$$\log_4 2022 > \log_4 2000 = \frac{\log_{10}(2\times 10^3)}{\log_{10}4} = \frac{\log_{10}2+3}{2\log_{10}2} = \frac{1}{2}+\frac{3}{2\log_{10}2} > 0.5+\frac{3}{2\times 0.3011} = 0.5+4.98\cdots > 5.4.$$

よって，

$$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$$

（証明終り）

2

$n$ 枚のカードから 3 枚を取り出す場合の数は，

$$ {}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}. $$

$Y=k\ (k=3,4,5,\cdots,n-2)$ のとき，

$$k-X\geqq 2,\quad Z-k\geqq 2$$

となる $(X,Z)$ の組の個数は

$$(k-2)(n-k-1)$$

であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{{}_nC_3}\sum_{k=3}^{n-2}(k-2)(n-k-1)$$

$$=\frac{1}{{}_nC_3}\sum_{l=1}^{n-4}l\{(n-3)-l\}$$

（$l=k-2$ とした）

$$=\frac{1}{{}_nC_3}\sum_{l=1}^{n-4}\{(n-3)l-l^2\}$$

$$=\frac{1}{{}_nC_3}\left\{\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n-3)-\frac{1}{6}(n-4)(n-3)(2n-7)\right\}$$

$$=\frac{(n-4)(n-3)}{6\cdot{}_nC_3}\{3(n-3)-(2n-7)\}$$

$$=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}.\quad\cdots(答)$$

（別解）

$$(X,Y,Z)=(a,b,c)$$

とし，

$$a'=a,\ b'=b-1,\ c'=c-2$$

とすると，

$$b'-a'\geqq 1,\quad c'-b'\geqq 1$$

$$1\leqq a'<b'<c'\leqq n-2$$

であるから，求める確率は，

$$\frac{{}_{n-2}C_3}{{}_nC_3}=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}.$$

$\cdots$（答）

3

$n^4+2$
$=(n^2+2)(n^2-2)+6$ …①

$n^6+2$
$=(n^2+2)(n^4-2n^2+4)-6$
…②

①より、$A_n$は6を割り切る.

①,②より、$A_n$は$n^2+2$と6の最大公約数である.

(イ) $n=6m$（$m$：整数）の場合
$n^2+2=36m^2+2$

(ロ) $n=6m\pm1$（$m$：整数）の場合
$n^2+2=36m^2\pm12m+3$
（複号同順）

(ハ) $n=6m\pm2$（$m$：整数）の場合
$n^2+2=36m^2\pm24m+6$
（複号同順）

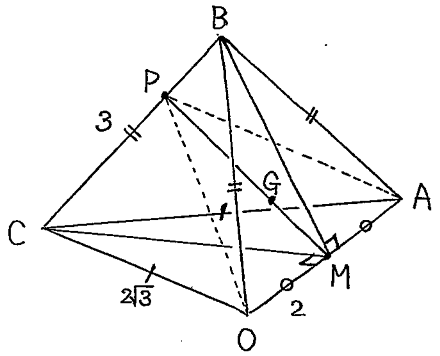
(ニ) $n=6m+3$（$m$：整数）の場合
$n^2+2=36m^2+36m+11$

以上から，$n$を6で割った余りを$r$（$r=0,1,2,3.4,5$）とするとき，

$$A_n=\begin{cases}2 & (r=0\text{のとき})\\ 3 & (r=1,5\text{のとき})\\ 6 & (r=2,4\text{のとき})\\ 1 & (r=3\text{のとき})\end{cases}$$
…(答)

4

(1) 辺OAの中点をMとする.




△OAB，△OACはそれぞれOB＝AB，OC＝ACの二等辺三角形だから，

BM⊥OA，CM⊥OA

より，(平面BCM)⊥OA.

よって，PM⊥OA.

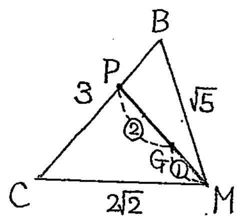
Gは△OAPの重心だから，中線PMを2：1に内分する.

したがって，$\overrightarrow{PG}\perp\overrightarrow{OA}$.

(2) 直角三角形OMB，OMCに着目して，

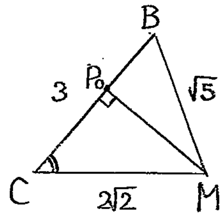
$MB=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$,

$MC=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$.




BCが最大辺であり，$3^2<(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{5})^2$ より，△MBCは鋭角三角形である.

$PG=\frac{2}{3}PM$ より，Pが辺BC上を動くとき，PGが最小となるのは，PMが最小となるときであり，それはPM⊥BCのときである. そのときのPを$P_0$とする.




△MBCに余弦定理を用いると

$$\cos\angle MCB=\frac{3^2+(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot3\cdot2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ゆえに，∠MCB＝45°.

よって，

$$P_0M=MC\sin\angle MCB$$

$$=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=2.$$

したがって，

$$(PGの最小値)=\frac{2}{3}P_0M$$

$$=\frac{4}{3}.\quad\cdots(答)$$

$\boxed{5}$ (1) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき $\cos^3 x \geqq 0$ であり $x=\frac{\pi}{2}$ のとき $\cos^3 x = 0$ より

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin^2 x\cos x)\,dx$$
$$=\left[\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{2}{3}\quad\cdots（答）$$

(2) $f(t)=t\cos^3 t\quad \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$

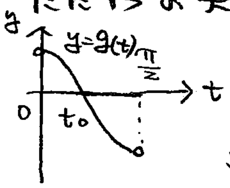
$$f'(t)=\cos^3 t-3t\cos^2 t\sin t$$
$$=\cos^2 t(\cos t-3t\sin t)$$

$0<t<\frac{\pi}{2}$ では $\cos^2 t>0$，

また，$g(t)=\cos t-3t\sin t$ とおくと $\cos t$，$-3t\sin t$ はいずれも単調減少．

$g(0)=1>0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{3\pi}{2}<0$ より

$g(t)=0$ は $0<t<\frac{\pi}{2}$ においてはただ1つの実数解 $t_0$ をもち




$y=g(t)$ のグラフより $f(t)$ の増減は次のようになる．

| $t$ | $(0)$ | $\cdots$ | $t_0$ | $\cdots$ | $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | | $\nearrow$ | 最大 | $\searrow$ | |

（証明終り）

ゆえに $t_0=\alpha$ であり

$\cos\alpha-3\alpha\sin\alpha=0\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)\cdots$①

$$f(\alpha)=\alpha\cos^3\alpha$$

① より $\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{3\sin\alpha}$ なので

$$f(\alpha)=\frac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}$$ （証明終り）

(3) $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{4}(2\sqrt{3}-\pi)>0$$

（なぜなら $\pi<3.2<2\sqrt{3}$ ）

ゆえに (2) の $y=g(t)$ のグラフより

$$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

ここで，

$$\frac{f(\alpha)}{S}=\frac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}\cdot\frac{3}{2}=\frac{\cos^4\alpha}{2\sin\alpha}$$

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ において

$\cos^4 x$ は正で単調減少

$2\sin x$ は正で単調増加なので，

$\dfrac{\cos^4 x}{2\sin x}$ は単調減少

ゆえに，

$$\frac{f(\alpha)}{S}<\frac{\cos^4\frac{\pi}{6}}{2\sin\frac{\pi}{6}}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4=\frac{9}{16}$$

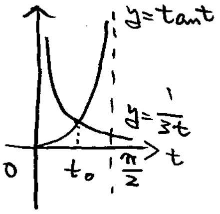
（証明終り）

（注）(2) において

$$f'(t)=3t\cos^3 t\left(\frac{1}{3t}-\tan t\right)$$

$0<t<\frac{\pi}{2}$ で $3t\cos^3 t>0$ に注意して

$y=\frac{1}{3t}$，$y=\tan t$ のグラフを考えて




$f(t)$ の増減を考えてもよい

$\boxed{6}$

「$x_{3m+1}$, $x_{3m+2}$, $x_{3m+3}$ は 3 で割ったときの余りがそれぞれ 0, 0, 1 となる整数である」 … (*)

とおく.

$m=0, 1, 2, \cdots$ に対して (*) が成り立つことを数学的帰納法で証明する.

(I) $m=0$ のとき.

$x_1 = 0$,

$x_2 = x_1 + 1 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi x_1}{3}\right) = 3$,

$x_3 = x_2 + 2 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi x_2}{3}\right) = 7$.

よって, (*) は成り立つ.

(II) $m=k$ のとき (*) が成り立つと仮定すると,

$x_{3k+1} = 3a$, $x_{3k+2} = 3b$, $x_{3k+3} = 3c+1$

($a, b, c$ は整数)

と表せる. このとき,

$$x_{3k+4} = x_{3k+3} + (3k+3) + 2\cos\left(\frac{2\pi x_{3k+3}}{3}\right)$$
$$= (3c+1) + (3k+3) + 2\cos\left\{\frac{2\pi(3c+1)}{3}\right\}$$
$$= (3c+1) + (3k+3) - 1$$
$$= 3(c+k+1).$$

$$x_{3k+5} = x_{3k+4} + (3k+4) + 2\cos\left(\frac{2\pi x_{3k+4}}{3}\right)$$
$$= 3(c+k+1) + (3k+4) + 2\cos\left\{\frac{2\pi(3c+3k+3)}{3}\right\}$$
$$= 3(c+k+1) + (3k+4) + 2$$
$$= 3(c+2k+3).$$

$$x_{3k+6} = x_{3k+5} + (3k+5) + 2\cos\left(\frac{2\pi x_{3k+5}}{3}\right)$$
$$= 3(c+2k+3) + (3k+5) + 2\cos\left\{\frac{2\pi(3c+6k+9)}{3}\right\}$$
$$= 3(c+2k+3) + (3k+5) + 2$$
$$= 3(c+3k+5) + 1.$$

よって, $m=k+1$ のときも (*) は成り立つ.

(I), (II) より, $m=0, 1, 2, \cdots$ に対して (*) は成り立つ.

(*) と漸化式から, $m=0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$x_{3m+2} = x_{3m+1} + (3m+1) + 2\cos\left(\frac{2\pi x_{3m+1}}{3}\right)$$
$$= x_{3m+1} + 3m+3. \quad \cdots ①$$

$$x_{3m+3} = x_{3m+2} + (3m+2) + 2\cos\left(\frac{2\pi x_{3m+2}}{3}\right)$$
$$= x_{3m+2} + 3m+4. \quad \cdots ②$$

$$x_{3m+4} = x_{3m+3} + (3m+3) + 2\cos\left(\frac{2\pi x_{3m+3}}{3}\right)$$
$$= x_{3m+3} + 3m+2. \quad \cdots ③$$

一方, 数列 $\{y_n\}$ の定義から, $m=0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$y_{3m+2} = y_{3m+1} + 2. \quad \cdots ④$$
$$y_{3m+3} = y_{3m+2} + 2 \quad \cdots ⑤$$
$$y_{3m+4} = y_{3m+3} - 1 \quad \cdots ⑥$$

$z_n = x_n - y_n$ とおくと, ①-④, ②-⑤, ③-⑥ より,

6

$$z_{3m+2}=z_{3m+1}+3m+1$$

$$z_{3m+3}=z_{3m+2}+3m+2$$

$$z_{3m+4}=z_{3m+3}+3m+3$$

したがって，

$$z_{n+1}=z_n+n.\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

$$z_{n+1}-z_n=n.$$

$n$のかわりに $1,2,\cdots,n-1$ として辺々加えると，$n\geqq 2$ のとき

$$z_n-z_1=1+2+\cdots+(n-1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n-1).$$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

$x_1=0$，$y_1=0$ より，$z_1=0$ であるから

$$z_n=\frac{1}{2}n(n-1).\quad\cdots(答)$$