数学

浜松医科大学　（前期） 1 / 4

医学部（医学科）

$\boxed{1}$

$$C:\begin{cases} x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}t^{\frac{3}{2}}, \\ y=2t. \end{cases}\quad (t\geqq 0)\qquad \cdots①$$

(1)　$P_1(x_1,\ y_1)$ は，曲線 C の $t=t_1\ (t_1\geqq 0)$ に対応する点であるとする．また，曲線 C の $t=0$ に対応する点が原点であり，原点から点 P_1 までの曲線の長さが $\dfrac{28}{9}$ であるから，

$$\int_0^{t_1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\frac{28}{9}.\qquad\cdots②$$

ここで，

$$\frac{dx}{dt}=2\sqrt{3}\,t^{\frac{1}{2}},\quad \frac{dy}{dt}=2\qquad\cdots③$$

より，

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\,t^{\frac{1}{2}}\right)^2+2^2}=2\sqrt{3t+1}.$$

② より，

$$\int_0^{t_1}2\sqrt{3t+1}\,dt=\frac{28}{9}$$

$$\left[\frac{4}{9}(3t+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{t_1}=\frac{28}{9}$$

$$\frac{4}{9}(3t_1+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{9}=\frac{28}{9}$$

$$(3t_1+1)^{\frac{3}{2}}=8.$$

よって，

$$t_1=1.$$

① より，求める点 P_1 の座標 $(x_1,\ y_1)$ は，

$$\boldsymbol{(x_1,\ y_1)=\left(\frac{4}{\sqrt{3}},\ 2\right).}\qquad\cdots(答)$$

(2)　$P_2(x_2,\ y_2)$ は，曲線 C の $t=t_2\ (t_2\geqq 0)$ に対応する点であるとする．点 P_2 における曲線 C の接線の傾きが $\dfrac{1}{3}$ であることと，③ より，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\sqrt{3}}{3}t^{-\frac{1}{2}}$$

であることから，

$$\frac{\sqrt{3}}{3}t_2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$t_2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

よって，

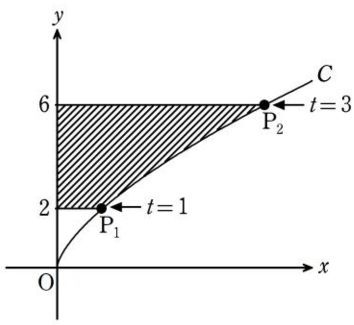
$$t_2=3.$$

① より，求める点 P_2 の座標 $(x_2,\ y_2)$ は，

$$\boldsymbol{(x_2,\ y_2)=(12,\ 6).}\qquad\cdots(答)$$

(3)　(1)，(2) より，次の表と曲線 C の概形を得る．

t	0	$\cdots$
$\dfrac{dx}{dt}$		$+$
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$
$(x,\ y)$	$(0,\ 0)$	$\nearrow$



求める体積を V とすると，①，③ より，

$$\begin{aligned} V&=\int_2^6\pi x^2dy \\ &=\pi\int_1^3x^2\frac{dy}{dt}dt \\ &=\pi\int_1^3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}t^{\frac{3}{2}}\right)^2\cdot 2dt \\ &=\frac{32}{3}\pi\int_1^3t^3dt \\ &=\frac{32}{3}\pi\left[\frac{1}{4}t^4\right]_1^3 \\ &=\boldsymbol{\frac{640}{3}\pi.}\end{aligned}\qquad\cdots(答)$$

医学部（医学科）

$\boxed{2}$

$$f(x)=(x+s)(x^2-2sx+t).$$

p が成り立つとき $f(0)=st>0$ であり，$t\geqq 0$ より，

$$s>0$$

が必要である．このとき，

$$0\leqq x\leqq 1 \text{ において，つねに } x+s>0$$

であるから，$g(x)=x^2-2sx+t=(x-s)^2-s^2+t$ とすると，p が成り立つための条件は，

「$0\leqq x\leqq 1$ において，つねに $g(x)>0$ となる」　…(*)

ことである．

(i)　$0<s<1$ のとき

(*)が成り立つための条件は，

$$g(s)>0 \quad \text{すなわち} \quad -s^2+t>0.$$

よって，

$$\begin{cases} 0<s<1, \\ t>s^2. \end{cases}$$

(ii)　$s\geqq 1$ のとき

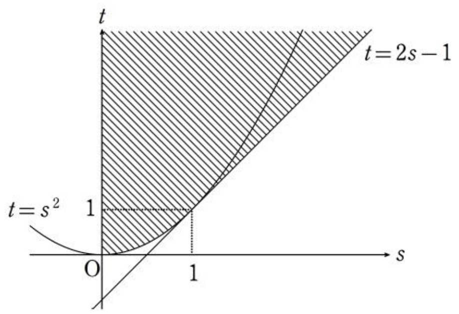
(*)が成り立つための条件は，

$$g(1)>0 \quad \text{すなわち} \quad 1-2s+t>0.$$

よって，

$$\begin{cases} s\geqq 1, \\ t>2s-1. \end{cases}$$

以上，(i)，(ii) より，条件 p を満たす点 $(s,\ t)$ の領域は次図の斜線部（ただし境界は含まない）．



…(答)

医学部（医学科）

3

(1) $x \geqq 0$ に対して，不等式

$$e^x \geqq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

がすべての自然数 n について成り立つことを証明するために，

$$F_n(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

とおき，$x \geqq 0$ のとき $F_n(x) \geqq 0$ であることを n に関する数学的帰納法で証明する．

[1] $F_1(x) = e^x - (1 + x)$ であり，

$$F_1'(x) = e^x - 1 \geqq 0 \quad (x \geqq 0)$$

であるから，$F_1(x)$ は $x \geqq 0$ で単調増加であり，この範囲で

$$F_1(x) \geqq F_1(0) = 0.$$

[2] $F_k(x) \geqq 0$ が成り立つと仮定する．

$$F_{k+1}(x) = e^x - \left\{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right\}$$

であるから，仮定より

$$\begin{aligned} F_{k+1}'(x) &= e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}\right) \\ &= F_k(x) \\ &\geqq 0. \end{aligned}$$

したがって，$F_{k+1}(x)$ は $x \geqq 0$ で単調増加であり，この範囲で

$$F_{k+1}(x) \geqq F_{k+1}(0) = 0.$$

[1], [2] より，すべての自然数 n について与えられた不等式は成り立つ．　(証明終り)

(別解)

$$G_n(x) = e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

とおき，$G_n(x) \leqq 1$ であることを示せばよい．$x \geqq 0$ に対し，

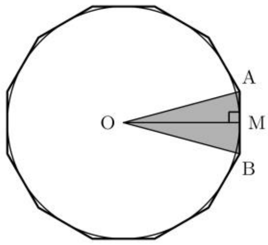
$$\begin{aligned} G_n'(x) &= -e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \\ &\quad + e^{-x}\left\{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\} \\ &= -e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!} \leqq 0 \end{aligned}$$

であるから，$x \geqq 0$ に対して $G_n(x)$ は単調減少であり，この範囲で

$$G_n(x) \leqq G_n(0) = 1.$$

(証明終り)

(2) 半径 1 の円の中心を O とし，その円に外接する正 12 角形の隣り合う頂点を A, B とする．さらに，辺 AB の中点を M とする．M は辺 AB と円の接点である．



$\angle \mathrm{MOA} = 15^\circ$ であるから，正 12 角形の一辺の長さは

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} = 2\mathrm{AM} &= 2\tan 15^\circ = 2\tan(60^\circ - 45^\circ) \\ &= 2 \cdot \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = 2(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

である．求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S = \triangle \mathrm{OAB} \times 12 &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{OM} \times 12 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2(2 - \sqrt{3}) \cdot 1 \times 12 \\ &= \mathbf{12(2 - \sqrt{3})}. \quad \cdots (答) \end{aligned}$$

(3) 半径 1 の円の面積は π であるから，(2) の図と結果より，

$$\pi < S \quad すなわち \quad \pi < 12(2 - \sqrt{3}).$$

一方，(1) で $x = 1$, $n = 3$ とすると，

$$e \geqq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}.$$

したがって，

$$\begin{aligned} \pi - e &< 12(2 - \sqrt{3}) - \frac{8}{3} \\ &< 12 \cdot (2 - 1.73) - 2.66 \\ &= 0.58 < \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

(証明終り)

医学部（医学科）

$\boxed{4}$

(1) 初めの部分で,「自然数 n に対して，コインを n 回投げ終えた段階で，その後最短で試行が終了するために必要な回数が k 回 $(k \geqq 0)$ である確率」とあるのは，意味があいまいであり，次の 2 つの解釈が可能である.

[解釈 1]「コインを n 回投げ終えた」条件の下での条件付き確率

[解釈 2]「コインを n 回以上投げ，かつ，n 回の段階では最短 k 回で終了する状態になる確率」

どちらかと言えば，[解釈 1] が妥当かと思われるが，解釈 1 であるとすれば，

$$「p_n(0) = p_n」\text{が誤り} \quad \cdots(\text{答})$$

であり，正しくは，

$$n \geqq 2 \text{に対して,} \quad p_n(0) = \frac{p_n}{1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k}$$

となる.

一方，解釈 2 であるとすれば，

$$「p_n(0)+p_n(1)+p_n(2) = 1」\text{が誤り} \quad \cdots(\text{答})$$

であり，正しくは，

$$n \geqq 2 \text{に対して,} \quad p_n(0)+p_n(1)+p_n(2) = 1-\sum_{k=1}^{n-1} p_k$$

となる.

(2) $p_1 = p_2 = 0,\ p_3 = \dfrac{1}{4}$ については，答案 A で書かれた値は正しい.

ここで，(1) の [解釈 2] で考えるとき，

$$「p_n(0) + p_n(1) + p_n(2) = 1」$$

は，$\sum_{k=1}^{n-1} p_k = 0$ となる $n = 2,\ 3$ のときには成立する．よって，

$$p_2 + 2p_3 + 4p_4 = p_3 + 2p_4 + 4p_5 = 1$$

は正しい.

以上より，

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

に対しては，p_n の値は正しく，具体的には，

$$p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 = \frac{1}{4}, \quad p_4 = p_5 = \frac{1}{8}.$$

$\sum_{k=1}^{3} p_k \neq 0$ だから,「$p_4+2p_5+4p_6 = 1$」は不成立であり，p_n の値が正しくない最小の n は，

$$n = 6. \quad \cdots(\text{答})$$

正しくは，

$$p_4 + 2p_5 + 4p_6 = 1 - p_3 = \frac{3}{4}$$

であり，これより，正しい p_6 は，

$$p_6 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{32}. \quad \cdots(\text{答})$$