問1（文理共通）

(1) 8人を区別のつく4組の2人組(ペア)に分ける方法は $\dfrac{8!}{2!2!2!2!}$ 通りあり，
これは求める場合の数 n の 4! 倍であるから

$$n=\frac{8!}{2^4\cdot 4!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}=7\cdot 3\cdot 5=105.$$

$105=100\times 1+5$ より，
n を100で割った商は $\boxed{1}$ であり，余りは $\boxed{5}$ である．　…(ア)(イ)(答)

(2) くじ引き前の4組が

$\underbrace{a_1 と a_2}_{A}$，$\underbrace{b_1 と b_2}_{B}$，$\underbrace{c_1 と c_2}_{C}$，$\underbrace{d_1 と d_2}_{D}$

であったとする．
くじ引き後，4組を作る方法は全部で $n(=105)$ 通りある．
このうち，
くじ引き前と同じメンバーである組が k 組のみとなる場合の数は

- $k=4$ のとき　1通り
- $k=3$ のとき　0通り
- $k=2$ のとき　$\underbrace{{}_4C_2}_{\text{A〜Dから2組選ぶ}}\times\underbrace{2}_{\text{残り2組の分け方}}=12$(通り)

（例．A, Bがくじ引き前と同じメンバーのとき c_1 のペアは d_1, d_2 の2通り．）

- $k=1$ のとき　$\underbrace{{}_4C_1}_{\text{A〜Dから1組選ぶ}}\times\underbrace{4\times 2}_{\text{残り3組の分け方}}=32$(通り)

（例．Aがくじ引き前と同じメンバーのとき b_1 のペアは c_1, c_2, d_1, d_2 の4通り．さらに，b_1 のペアが c_1 のとき b_2 のペアは d_1, d_2 の2通り．）

余事象を考えて，求める確率は

$$1-\frac{1+12+32}{105}=1-\frac{3}{7}=\frac{\boxed{4}}{\boxed{7}}$$　…(ウ)(エ)(答)

【問 1】(文理共通)(つづき)

別解

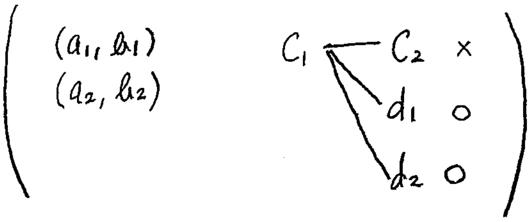
(2) 8 人のメンバーを a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 とする.

最初に $(a_1,\ a_2)$, $(b_1,\ b_2)$, $(c_1,\ c_2)$, $(d_1,\ d_2)$ という 4 組ができていたとする.

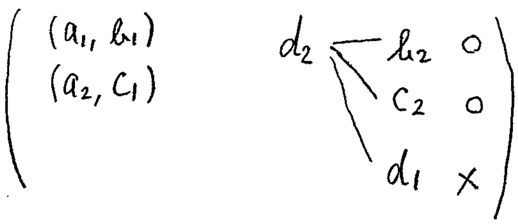
次の作業に取り組むペアを作るためにくじ引きをしたとき，a_1 が a_2 以外のメンバーとペアになる確率は $\frac{6}{7}$ である.

例えば，a_1 と b_1 がペアになったとき，a_2 は誰とペアになってもよい.

- 例えば，a_2 と b_2 がペアとなるとき，残ったメンバーは c_1, c_2, d_1, d_2 で，c_1 は c_2 以外の 2 人のうちのどちらか 1 人とペアになれば条件をみたし，その確率は $\frac{2}{3}$ である.



- 例えば，a_2 と c_1 がペアとなるとき，残ったメンバーは b_2, c_2, d_1, d_2 で，d_2 は d_1 以外の 2 人のうちのどちらか 1 人とペアになれば条件をみたし，その確率も $\frac{2}{3}$ である.



したがって　求める確率は,

$$\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\boxed{4}}{\boxed{7}}$$

…ウエ (答)

【問 2】(文理共通)

(1) 真数条件より $y>0,\ x-2>0,\ \dfrac{1}{8-x}>0$
これより，

$$y>0,\ 2<x<8 \qquad \cdots\cdots①$$

このとき，

$$\log_4 y+\log_{\frac{1}{4}}(x-2)+\log_4\frac{1}{8-x}\geqq -1$$
$$\log_4 y+\frac{\log_4(x-2)}{\log_4\frac{1}{4}}-\log_4(8-x)\geqq -1$$
$$\log_4 y-\log_4(x-2)-\log_4(8-x)\geqq \log_4\frac{1}{4}$$
$$\log_4 y\geqq \log_4\frac{1}{4}+\log_4(x-2)+\log_4(8-x)$$
$$\log_4 y\geqq \log_4\frac{1}{4}(x-2)(8-x)$$

底 $4>1$ より，

$$y\geqq \frac{1}{4}(x-2)(8-x)$$
$$y\geqq -\frac{1}{4}(x-2)(x-8) \qquad \cdots\cdots②$$

また，

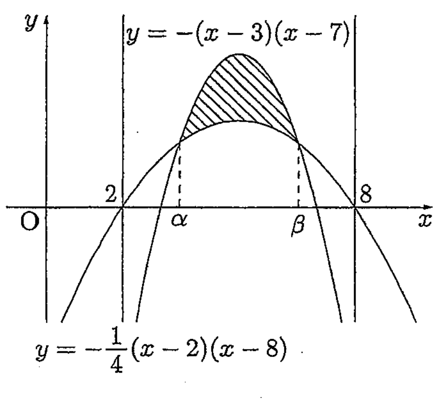
$$2^{y+x^2+11}\leqq 1024^{x-1}$$
$$2^{y+x^2+11}\leqq \left(2^{10}\right)^{x-1}=2^{10x-10}$$

底 $2>1$ より，

$$y+x^2+11\leqq 10x-10$$
$$y\leqq -x^2+10x-21$$
$$y\leqq -(x-3)(x-7) \qquad \cdots\cdots③$$

以上，①〜③ を図示すると下図斜線部分を得る．
$y=-\dfrac{1}{4}(x-2)(x-8)$，$y=-(x-3)(x-7)$ を連立して，

$$-\frac{1}{4}(x-2)(x-8)=-(x-3)(x-7)$$
$$-\frac{1}{4}\left(x^2-10x+16\right)=-\left(x^2-10x+21\right)$$
$$x^2-10x+16=4x^2-40x+84$$
$$3x^2-30x+68=0$$
$$x=\frac{15\pm\sqrt{15^2-3\cdot 68}}{3}=\frac{15\pm\sqrt{21}}{3}$$



【問2】(文理共通)(つづき)

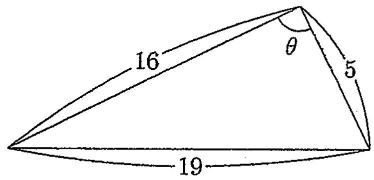
そこで，$\alpha=\dfrac{15-\sqrt{21}}{3}$，$\beta=\dfrac{15+\sqrt{21}}{3}$，題意の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}
S&=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{-(x-3)(x-7)+\frac{1}{4}(x-2)(x-8)\right\}dx\\
&=-\frac{3}{4}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx\\
&=-\frac{3}{4}\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}\\
&=\frac{1}{8}\left(\frac{15+\sqrt{21}}{3}-\frac{15-\sqrt{21}}{3}\right)^3\\
&=\frac{1}{8}\left(\frac{2\sqrt{21}}{3}\right)^3=\frac{\boxed{7}\sqrt{\boxed{21}}}{\boxed{9}}
\end{aligned}$$

…オカキ (答)

(2) 図のように角 θ を定める．余弦定理より，

$$\cos\theta=\frac{16^2+5^2-19^2}{2\cdot16\cdot5}=-\frac{1}{2}$$



となるから $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

よって，求める面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot16\cdot5\cdot\sin\frac{2}{3}\pi=\boxed{20}\sqrt{\boxed{3}}$$

…クケ (答)

別解

$s=\dfrac{5+16+19}{2}=20$ とするとき，ヘロンの公式より，

$$\begin{aligned}
S&=\sqrt{s(s-5)(s-16)(s-19)}\\
&=\sqrt{20\cdot15\cdot4\cdot1}=\boxed{20}\sqrt{\boxed{3}}
\end{aligned}$$

…クケ (答)

(3) $2021_{(n)}=2n^3+2n+1$ である．各位の数が 2 以下より $n\geqq3$ であるから，n の値が小さいものから順に調べていく．

(i) $n=3$ のとき
$2021_{(3)}=2\cdot3^3+2\cdot3+1=61$(素数)

(ii) $n=4$ のとき
$2021_{(4)}=2\cdot4^3+2\cdot4+1=137$(素数)

(iii) $n=5$ のとき
$2021_{(5)}=2\cdot5^3+2\cdot5+1=261=3\cdot87$

であるから，$2021_{(n)}$ が素数である最小の n は $n=\boxed{3}$ …コ (答)

また，$2021_{(n)}$ が合成数である最小の n は $n=\boxed{5}$ …サ (答)

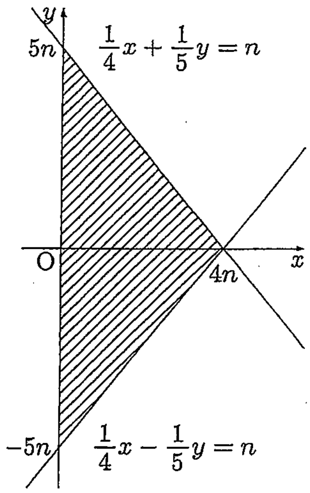
【問3】(文理共通)

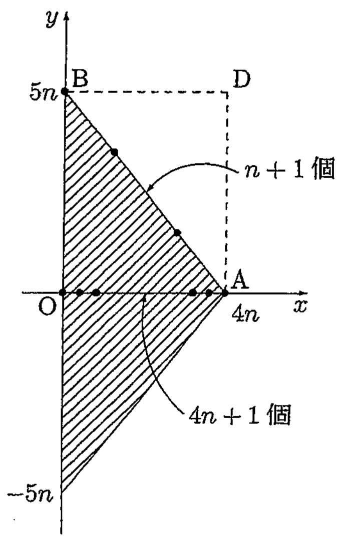
$\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}|y| \leqq n$ について，

(i) $y \geqq 0$ のとき
$\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}y \leqq n$

(ii) $y \leqq 0$ のとき
$\frac{1}{4}x-\frac{1}{5}y \leqq n$

これと $x \geqq 0$ をあわせると，連立不等式 $\begin{cases} x \geqq 0 \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{5}|y| \leqq n \end{cases}$
を満たす領域は右図斜線部分 (境界含む) である．





このうち $y \geqq 0$ の範囲における格子点の個数を S とする．線分 AB 上には全部で $n+1$ 個の格子点が存在することに注意して，長方形 OADB の周および内部に存在する格子点の個数を考えると，

$$(4n+1)(5n+1)=S+S-(n+1)$$
$$20n^2+9n+1+n+1=2S$$
$$S=10n^2+5n+1$$

以上から，求める個数は

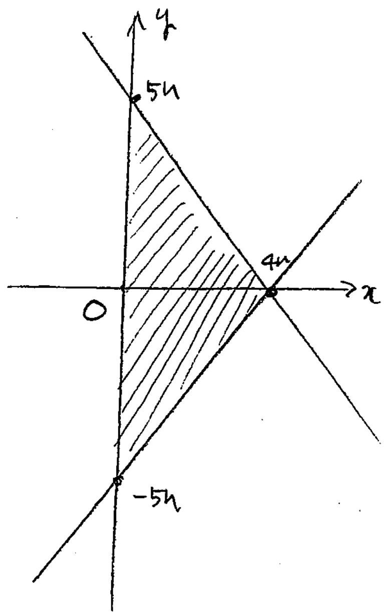
$$S+S-(4n+1)=2(10n^2+5n+1)-(4n+1)$$
$$=\boxed{20}n^2+\boxed{6}n+\boxed{1} \qquad \cdots \text{スセソ (答)}$$

特に $n=1$ のときは $20+6+1=\boxed{27}$ 　　…シ (答)

問3（文理共通）（つづき1）

（別解）

$$\begin{cases} x \geqq 0 & \cdots ① \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}|y| \leqq n & \cdots ② \end{cases}$$



$② \Leftrightarrow |y| \leqq \frac{5}{4}(4n - x)$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4}(x - 4n) \leqq y \leqq \frac{5}{4}(4n - x)$

①かつ②の表す領域は、図の斜線部分（境界含む）

(i) 直線 $x = 4k$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 上の格子点の個数は

$\frac{5}{4}(4k - 4n) \leqq y \leqq \frac{5}{4}(4n - 4k)$，すなわち $5(k - n) \leqq y \leqq 5(n - k)$

より $5(n - k) \times 2 + 1 = 10(n - k) + 1$ コ

(ii) 直線 $x = 4k - 3$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 上の格子点の個数は

$\frac{5}{4}(4k - 3 - 4n) \leqq y \leqq \frac{5}{4}(4n - 4k + 3)$ すなわち $5(k - n) - \frac{15}{4} \leqq y \leqq 5(n - k) + 3 + \frac{3}{4}$

より $\{5(n - k) + 3\} \times 2 + 1 = 10(n - k) + 7$ コ

(iii) 直線 $x = 4k - 2$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 上の格子点の個数は

$\frac{5}{4}(4k - 2 - 4n) \leqq y \leqq \frac{5}{4}(4n - 4k + 2)$ すなわち $5(k - n) - \frac{5}{2} \leqq y \leqq 5(n - k) + 2 + \frac{1}{2}$

より $\{5(n - k) + 2\} \times 2 + 1 = 10(n - k) + 5$ コ

(iv) 直線 $x = 4k - 1$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 上の格子点の個数は

$\frac{5}{4}(4k - 1 - 4n) \leqq y \leqq \frac{5}{4}(4n - 4k + 1)$ すなわち $5(k - n) - \frac{5}{4} \leqq y \leqq 5(n - k) + 1 + \frac{1}{4}$

より $\{5(n - k) + 1\} \times 2 + 1 = 10(n - k) + 3$ コ

問3（文理共通）（つづき2）

(i)〜(iv)をあわせて，①.②を満たす整数の組(x, y)の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}\{10(n-k)+1\}+\sum_{k=1}^{n}\{10(n-k)+7\}+\sum_{k=1}^{n}\{10(n-k)+5\}+\sum_{k=1}^{n}\{10(n-k)+3\}$$

$$=(10n+1)+\sum_{k=1}^{n}\{10(n-k)+1+10(n-k)+7+10(n-k)+5+10(n-k)+3\}$$

$$=10n+1+\sum_{k=1}^{n}\{40(n-k)+16\}$$

$$=10n+1+40\{(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0\}+16n$$

$$=10n+1+40\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+16n$$

$$=\boxed{20}\,n^2+\boxed{6}\,n+\boxed{1}$$

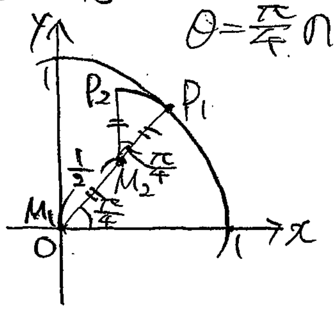
…(ス)〜(ソ)(答)

$n=1$のときは

$$20+6+1=\boxed{27}$$

…(タ)(答)

[問4](理系)



$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき、$\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{M_1P_2}$

$=\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2P_2}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{M_1P_1}+\overrightarrow{M_2P_2}$

$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2},\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}(0,1)$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$

なので、$x_2=\frac{\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{4}}$, $y_2=\frac{\boxed{2}+\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{4}}$ …(タ,チ,ツ,テ,ト)(答)

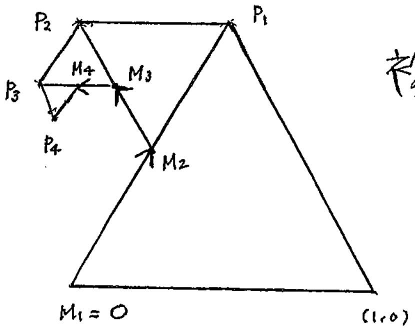
以下、$\theta=\frac{\pi}{3}$ のときで考える。

$n\to\infty$ のとき、$n\geqq 2$ として考えることができるので、

このとき、$\overrightarrow{OM_n}=\overrightarrow{M_1M_n}$

$=\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2M_3}+\cdots+\overrightarrow{M_{n-1}M_n}$ …①

であり、$\overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}}$ は、$\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$ を $\frac{1}{2}$ 倍し、$\frac{\pi}{3}$ 回転させたものである。 …②



複素数平面上で $M_n(m_n)$ とし、

$\alpha=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ とすると、

$m_2=\frac{1}{2}\alpha$ であり、①,②より、

$m_n=\frac{1}{2}\alpha+\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^{n-1}$ $(n\geqq 2)$

$=\frac{1}{2}\alpha\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}\alpha}$ $\left(\because \frac{1}{2}\alpha\neq 1\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}i\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^{n-1}\right\}$ …③

$P_n(z_n)$ とすると、$z_n=x_n+y_ni$ …④

M_{n+1} は M_nP_n の中点なので、$m_{n+1}=\frac{z_n+m_n}{2}$

したがって、$z_n=2m_{n+1}-m_n$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}i\left\{1-\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^n\right\}-\frac{\sqrt{3}}{3}i\left\{1-\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^{n-1}\right\}$ (∵③)

$=\frac{\sqrt{3}}{3}i\left\{1+(1-\alpha)\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^{n-1}\right\}$ …⑤

[問4](理系)(つづき)

ここで、$\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^{n-1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|\alpha^{n-1}|$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $(\because |\alpha^{n-1}|=1)$

$= 0$ $\left(\because \left|\frac{1}{2}\right|<1\right)$

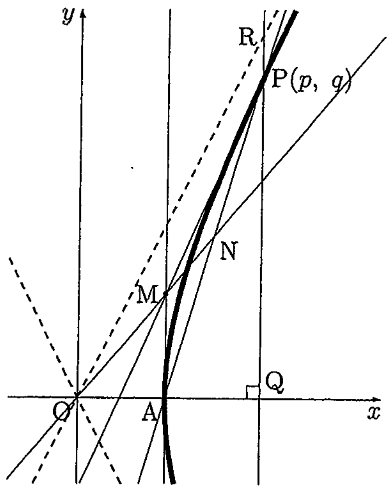
なので、⑤より、

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

ゆえに、④より、

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \boxed{0},\ \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}} \quad \cdots (ナ,ニ,ヌ)(答)$$

【問 5】(理系)



$H:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ において，焦点の座標が $(\pm\sqrt{5},\ 0)$ であることから，

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$$
$$a^2+b^2=5 \qquad \cdots\cdots①$$

頂点の座標が $(\pm1,\ 0)$ であることから，

$$a^2=1 \qquad \cdots\cdots②$$

となる．①，②より，

$$a^2=\boxed{1},\ b^2=\boxed{4} \qquad \cdots ネノ\ (答)$$

このとき，$H:x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ より漸近線の方程式は $y=\pm2x$ となるから，傾きが正であるものの方程式は，

$$y=\boxed{2}x \qquad \cdots ハ\ (答)$$

$\mathrm{P}(p,\ q)$ のとき $\mathrm{R}(p,\ 2p)$ より

$$S=\frac{1}{2}\cdot p\cdot 2p=p^2 \qquad \cdots\cdots③$$

また，H 上の点 P における接線の方程式は $px-\dfrac{qy}{4}=1$ より，$x=1$ とすると，

$$p-\frac{qy}{4}=1$$
$$p-1=\frac{qy}{4}$$
$$y=\frac{4(p-1)}{q}$$

であるから $\mathrm{M}\left(1,\ \dfrac{4(p-1)}{q}\right)$ となる．これより，直線 OM の方程式は

$$y=\frac{4(p-1)}{q}x \qquad \cdots\cdots④$$

である．直線 AP の方程式は，

$$y=\frac{q}{p-1}(x-1) \qquad \cdots\cdots⑤$$

より，④，⑤を連立して，

$$\frac{4(p-1)}{q}x=\frac{q}{p-1}(x-1)$$
$$4(p-1)^2x=q^2(x-1)$$
$$\{4(p-1)^2-q^2\}x=-q^2 \qquad \cdots\cdots⑥$$

ここで，$\mathrm{P}(p,\ q)$ は H 上より，

$$p^2-\frac{q^2}{4}=1$$
$$q^2=4p^2-4 \qquad \cdots\cdots⑦$$

【問 5】(理系)(つづき)

が成立するから，これを⑥に代入して，

$$\{4(p-1)^2-4p^2+4\}x=4-4p^2$$
$$8(1-p)x=4(1-p)(1+p)$$
$$x=\frac{1+p}{2}\quad (\text{P は第 1 象限より } p \neq 1)$$

これは N が線分 AP の中点であることを意味するから，$\mathrm{N}\left(\frac{1+p}{2},\ \frac{q}{2}\right)$

よって，

$$T=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{q}{2}=\frac{q}{4} \qquad \cdots\cdots ⑧$$

となる．P は第 1 象限にあることに注意すると，⑦より $q=\sqrt{4p^2-4}$ であるから，

$$\begin{aligned}\frac{T}{S}&=\frac{\sqrt{p^2-1}}{2p^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^2}}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{-\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

これは $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{2}$，つまり

$$p=\sqrt{\boxed{2}} \text{ のとき 最大値} \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} \qquad \cdots \text{ヒフヘ (答)}$$

をとる．

別解

P は第 1 象限より $q>0$ であることと，③，⑦，⑧，相加・相乗平均の不等式より，

$$\begin{aligned}\frac{T}{S}&=\frac{q}{4}\cdot\frac{1}{p^2}\\&=\frac{q}{q^2+4}\\&=\frac{1}{q+\frac{4}{q}}\leqq\frac{1}{2\sqrt{q\cdot\frac{4}{q}}}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

等号は $q=\frac{4}{q}$，つまり $q=2$ のときに成立する．

このとき，⑦ より $p=\sqrt{2}$ となるから，

$$p=\sqrt{\boxed{2}} \text{ のとき 最大値} \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} \qquad \cdots \text{ヒフヘ (答)}$$

をとる．