問1（文理共通）

(1) 8人を区別のつく4組の2人組(ペア)に分ける方法は $\dfrac{8!}{2!2!2!2!}$ 通りあり，
これは求める場合の数 n の 4! 倍であるから

$$n=\frac{8!}{2^4\cdot 4!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}=7\cdot 3\cdot 5=105.$$

$105=100\times 1+5$ より，
n を100で割った商は $\boxed{1}$ であり，余りは $\boxed{5}$ である．　… (ア)(イ)(答)

(2) くじ引き前の4組が

$$\underbrace{a_1 と a_2}_{A},\ \underbrace{b_1 と b_2}_{B},\ \underbrace{c_1 と c_2}_{C},\ \underbrace{d_1 と d_2}_{D}$$

であったとする．
くじ引き後，4組を作る方法は全部で $n(=105)$ 通りある．
このうち，
くじ引き前と同じメンバーである組が k 組のみとなる場合の数は

- $k=4$ のとき　1通り
- $k=3$ のとき　0通り
- $k=2$ のとき　$\underbrace{{}_4C_2}_{\text{(A〜Dから2組選ぶ)}}\times\underbrace{2}_{\text{(残り2組の分け方)}}=12$(通り)
  （例．A, Bがくじ引き前と同じメンバーのとき c_1 のペアは d_1, d_2 の 2通り．）
- $k=1$ のとき　$\underbrace{{}_4C_1}_{\text{(A〜Dから1組選ぶ)}}\times\underbrace{4\times 2}_{\text{(残り3組の分け方)}}=32$(通り)
  （例．Aがくじ引き前と同じメンバーのとき b_1 のペアは c_1, c_2, d_1, d_2 の4通り
  さらに，b_1 のペアが c_1 のとき
  b_2 のペアは d_1, d_2 の 2通り．）

余事象を考えて，求める確率は

$$1-\frac{1+12+32}{105}=1-\frac{3}{7}=\frac{\boxed{4}}{\boxed{7}}$$　… (ウ)(エ)(答)

【問 1】(文理共通)(つづき)

別解

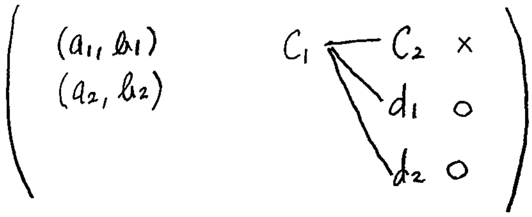
(2) 8 人のメンバーを a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 とする．

最初に $(a_1,\ a_2)$, $(b_1,\ b_2)$, $(c_1,\ c_2)$, $(d_1,\ d_2)$ という 4 組ができていたとする．

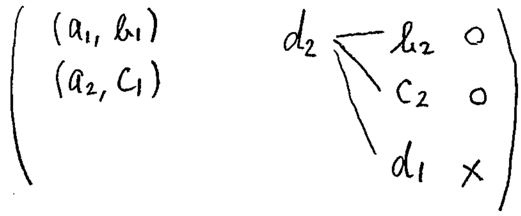
次の作業に取り組むペアを作るためにくじ引きをしたとき，a_1 が a_2 以外のメンバーとペアになる確率は $\dfrac{6}{7}$ である．

例えば，a_1 と b_1 がペアになったとき，a_2 は誰とペアになってもよい．

- 例えば，a_2 と b_2 がペアとなるとき，残ったメンバーは c_1, c_2, d_1, d_2 で，c_1 は c_2 以外の 2 人のうちのどちらか 1 人とペアになれば条件をみたし，その確率は $\dfrac{2}{3}$ である．



- 例えば，a_2 と c_1 がペアとなるとき，残ったメンバーは b_2, c_2, d_1, d_2 で，d_2 は d_1 以外の 2 人のうちのどちらか 1 人とペアになれば条件をみたし，その確率も $\dfrac{2}{3}$ である．



したがって　求める確率は，

$$\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\boxed{4}}{\boxed{7}}$$

…ウエ (答)

【問 2】(文理共通)

(1) 真数条件より $y>0$, $x-2>0$, $\dfrac{1}{8-x}>0$

これより，

$$y>0,\ 2<x<8 \qquad \cdots\cdots①$$

このとき，

$$\log_4 y+\log_{\frac{1}{4}}(x-2)+\log_4\frac{1}{8-x}\geqq -1$$
$$\log_4 y+\frac{\log_4(x-2)}{\log_4\frac{1}{4}}-\log_4(8-x)\geqq -1$$
$$\log_4 y-\log_4(x-2)-\log_4(8-x)\geqq \log_4\frac{1}{4}$$
$$\log_4 y\geqq \log_4\frac{1}{4}+\log_4(x-2)+\log_4(8-x)$$
$$\log_4 y\geqq \log_4\frac{1}{4}(x-2)(8-x)$$

底 $4>1$ より，

$$y\geqq\frac{1}{4}(x-2)(8-x)$$
$$y\geqq-\frac{1}{4}(x-2)(x-8) \qquad \cdots\cdots②$$

また，

$$2^{y+x^2+11}\leqq 1024^{x-1}$$
$$2^{y+x^2+11}\leqq \left(2^{10}\right)^{x-1}=2^{10x-10}$$

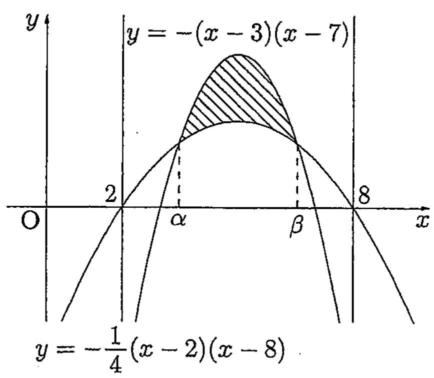
底 $2>1$ より，

$$y+x^2+11\leqq 10x-10$$
$$y\leqq -x^2+10x-21$$
$$y\leqq -(x-3)(x-7) \qquad \cdots\cdots③$$

以上，①～③ を図示すると下図斜線部分を得る.

$y=-\dfrac{1}{4}(x-2)(x-8)$, $y=-(x-3)(x-7)$ を連立して，

$$-\frac{1}{4}(x-2)(x-8)=-(x-3)(x-7)$$
$$-\frac{1}{4}\left(x^2-10x+16\right)=-\left(x^2-10x+21\right)$$
$$x^2-10x+16=4x^2-40x+84$$
$$3x^2-30x+68=0$$
$$x=\frac{15\pm\sqrt{15^2-3\cdot 68}}{3}=\frac{15\pm\sqrt{21}}{3}$$



【問2】(文理共通)(つづき)

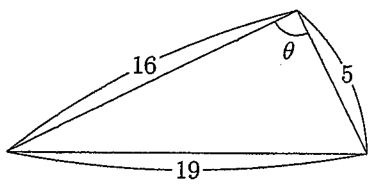
そこで，$\alpha=\dfrac{15-\sqrt{21}}{3}$，$\beta=\dfrac{15+\sqrt{21}}{3}$，題意の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\left\{-(x-3)(x-7)+\frac{1}{4}(x-2)(x-8)\right\}dx\\&=-\frac{3}{4}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=-\frac{3}{4}\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}\\&=\frac{1}{8}\left(\frac{15+\sqrt{21}}{3}-\frac{15-\sqrt{21}}{3}\right)^3\\&=\frac{1}{8}\left(\frac{2\sqrt{21}}{3}\right)^3=\frac{\boxed{7}\sqrt{\boxed{21}}}{\boxed{9}}\end{aligned}$$

…オカキ (答)

(2) 図のように角 θ を定める．余弦定理より，

$$\cos\theta=\frac{16^2+5^2-19^2}{2\cdot16\cdot5}=-\frac{1}{2}$$



となるから $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

よって，求める面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot16\cdot5\cdot\sin\frac{2}{3}\pi=\boxed{20}\sqrt{\boxed{3}}$$

…クケ (答)

別解

$s=\dfrac{5+16+19}{2}=20$ とするとき，ヘロンの公式より，

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{s(s-5)(s-16)(s-19)}\\&=\sqrt{20\cdot15\cdot4\cdot1}=\boxed{20}\sqrt{\boxed{3}}\end{aligned}$$

…クケ (答)

(3) $2021_{(n)}=2n^3+2n+1$ である．各位の数が 2 以下より $n\geqq3$ であるから，n の値が小さいものから順に調べていく．

(i) $n=3$ のとき
$2021_{(3)}=2\cdot3^3+2\cdot3+1=61$(素数)

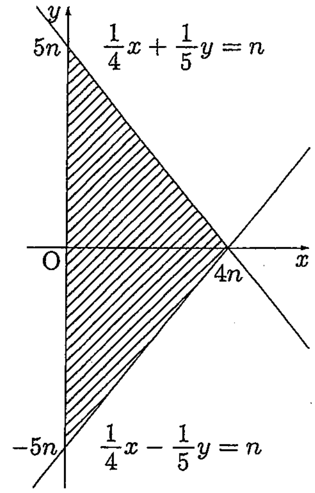
(ii) $n=4$ のとき
$2021_{(4)}=2\cdot4^3+2\cdot4+1=137$(素数)

(iii) $n=5$ のとき
$2021_{(5)}=2\cdot5^3+2\cdot5+1=261=3\cdot87$

であるから，$2021_{(n)}$ が素数である最小の n は $n=\boxed{3}$　…コ (答)

また，$2021_{(n)}$ が合成数である最小の n は $n=\boxed{5}$　…サ (答)

【問3】(文理共通)

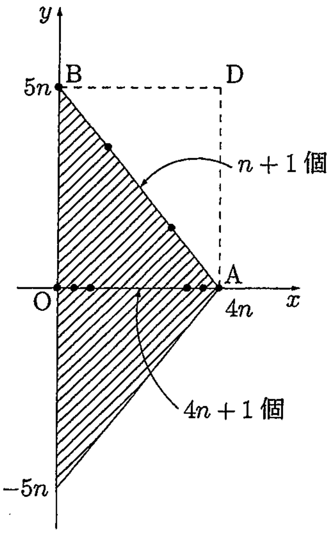


$\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}|y| \leqq n$ について，

(i) $y \geqq 0$ のとき
$\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}y \leqq n$

(ii) $y \leqq 0$ のとき
$\frac{1}{4}x-\frac{1}{5}y \leqq n$

これと $x \geqq 0$ をあわせると，連立不等式 $\begin{cases} x \geqq 0 \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{5}|y| \leqq n \end{cases}$
を満たす領域は右図斜線部分 (境界含む) である．



このうち $y \geqq 0$ の範囲における格子点の個数を S とする．線分 AB 上には全部で $n+1$ 個の格子点が存在することに注意して，長方形 OADB の周および内部に存在する格子点の個数を考えると，

$$(4n+1)(5n+1)=S+S-(n+1)$$
$$20n^2+9n+1+n+1=2S$$
$$S=10n^2+5n+1$$

以上から，求める個数は

$$S+S-(4n+1)=2(10n^2+5n+1)-(4n+1)$$
$$=\boxed{20}n^2+\boxed{6}n+\boxed{1}$$
…スセソ (答)

特に $n=1$ のときは $20+6+1=\boxed{27}$ …シ (答)

問3（文理共通）（つづき1）

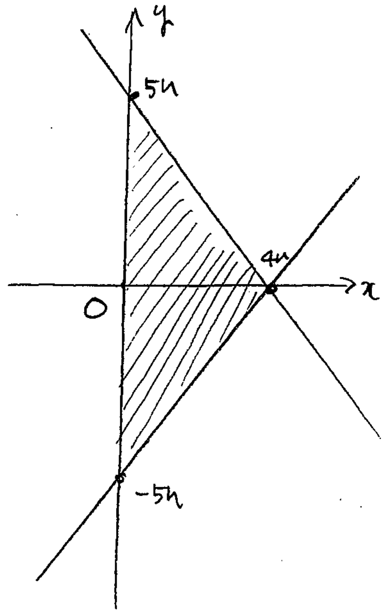
（別解）

$$\begin{cases} x \geqq 0 & \cdots ① \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}|y| \leqq n & \cdots ② \end{cases}$$

② $\Leftrightarrow$ $|y| \leqq \frac{5}{4}(4n-x)$

$\Leftrightarrow$ $\frac{5}{4}(x-4n) \leqq y \leqq \frac{5}{4}(4n-x)$

①かつ②の表す領域は，図の斜線部分（境界含む）



(i) 直線 $x=4k$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$ 上の格子点の個数は

$\frac{5}{4}(4k-4n) \leqq y \leqq \frac{5}{4}(4n-4k)$，すなわち $5(k-n) \leqq y \leqq 5(n-k)$

より $5(n-k)\times 2+1 = 10(n-k)+1$ コ

(ii) 直線 $x=4k-3$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 上の格子点の個数は

$\frac{5}{4}(4k-3-4n) \leqq y \leqq \frac{5}{4}(4n-4k+3)$ すなわち $5(k-n)-\frac{15}{4} \leqq y \leqq 5(n-k)+3+\frac{3}{4}$

より $\{5(n-k)+3\}\times 2+1 = 10(n-k)+7$ コ

(iii) 直線 $x=4k-2$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 上の格子点の個数は

$\frac{5}{4}(4k-2-4n) \leqq y \leqq \frac{5}{4}(4n-4k+2)$ すなわち $5(k-n)-\frac{5}{2} \leqq y \leqq 5(n-k)+2+\frac{1}{2}$

より $\{5(n-k)+2\}\times 2+1 = 10(n-k)+5$ コ

(iv) 直線 $x=4k-1$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 上の格子点の個数は

$\frac{5}{4}(4k-1-4n) \leqq y \leqq \frac{5}{4}(4n-4k+1)$ すなわち $5(k-n)-\frac{5}{4} \leqq y \leqq 5(n-k)+1+\frac{1}{4}$

より $\{5(n-k)+1\}\times 2+1 = 10(n-k)+3$ コ

問3（文理共通）（つづき2）

(i)〜(iv)をあわせて，①，②を満たす整数の組(x, y)の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}\{10(n-k)+1\}+\sum_{k=1}^{n}\{10(n-k)+7\}+\sum_{k=1}^{n}\{10(n-k)+5\}+\sum_{k=1}^{n}\{10(n-k)+3\}$$

$$=(10n+1)+\sum_{k=1}^{n}\{10(n-k)+1+10(n-k)+7+10(n-k)+5+10(n-k)+3\}$$

$$=10n+1+\sum_{k=1}^{n}\{40(n-k)+16\}$$

$$=10n+1+40\{(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0\}+16n$$

$$=10n+1+40\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+16n$$

$$=\boxed{20}\,n^2+\boxed{6}\,n+\boxed{1}$$

…(ス)〜(ソ)（答）

$n=1$のときは

$$20+6+1=\boxed{27}$$

…(タ)（答）

【問 4】(文系)

不等式 $(x-6)^2+(y-4)^2 \leqq 4$ を表す領域を D とすると，D は右図斜線部分（境界含む）である．

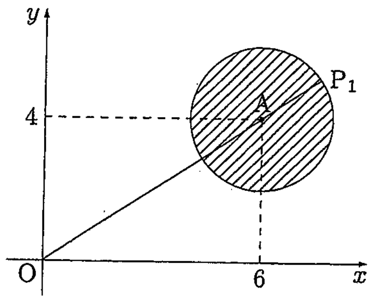
円 $(x-6)^2+(y-4)^2=4$ の中心を A とする．

$x^2+y^2=k$ とすると $k=\mathrm{OP}^2$ であり，この最大値は P が右図の P_1 のときで，

$$\mathrm{OP}_1=\sqrt{6^2+4^2}+2=2\sqrt{13}+2$$

より，x^2+y^2 の最大値は，

$$(2\sqrt{13}+2)^2=\boxed{56}+\boxed{8}\sqrt{\boxed{13}} \quad \cdots タチツ\,(答)$$



ただし，P_1 は円 $(x-6)^2+(y-4)^2=4$ と直線 OA との交点のうち，O から遠い方の点とする．

$\dfrac{y}{x}=m$ とすると $y=mx$ となる．直線 $y=mx$ と点 A との距離を d_1 とすると，

$$d_1=\frac{|6m-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$$

直線 $y=mx$ と領域 D が共有点を持つのは $d_1 \leqq 2$ のときより，

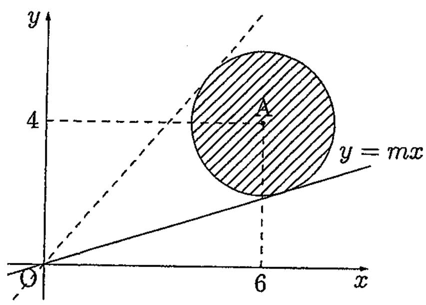
$$\frac{|6m-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} \leqq 2$$

$$|3m-2| \leqq \sqrt{m^2+1}$$

$$9m^2-12m+4 \leqq m^2+1$$

$$8m^2-12m+3 \leqq 0$$

$$\frac{3-\sqrt{3}}{4} \leqq m \leqq \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$



以上から，求める最小値は $\dfrac{\boxed{3}-\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{4}}$ $\cdots$テトナ (答)

$x+y=l$ とする．直線 $x+y=l$ と点 A との距離を d_2 とすると，

$$d_2=\frac{|6+4-l|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|10-l|}{\sqrt{2}}$$

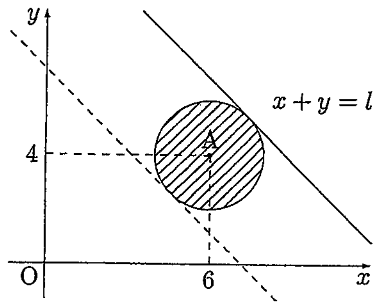
直線 $x+y=l$ と領域 D が共有点を持つのは $d_2 \leqq 2$ のときより，

$$\frac{|10-l|}{\sqrt{2}} \leqq 2$$

$$|10-l| \leqq 2\sqrt{2}$$

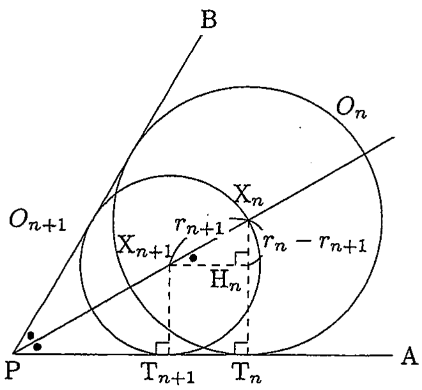
$$-2\sqrt{2} \leqq 10-l \leqq 2\sqrt{2}$$

$$10-2\sqrt{2} \leqq l \leqq 10+2\sqrt{2}$$



以上から，求める最大値は $\boxed{10}+\boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}$ $\cdots$ニヌネ (答)

【問5】(文系)



円 O_n の中心を X_n，半径を r_n，X_n から直線 PA に下ろした垂線の足を T_n とする．

このとき，X_{n+1} から直線 X_nT_n に下ろした垂線の足を H_n とすると，

$$X_nX_{n+1} = r_{n+1},\ X_nH_n = r_n - r_{n+1}$$

また，$\angle X_nX_{n+1}H_n = \dfrac{\pi}{6}$ であるから，

$$X_nX_{n+1} : X_nH_n = 2 : 1$$
$$r_{n+1} : (r_n - r_{n+1}) = 2 : 1$$
$$r_{n+1} = 2(r_n - r_{n+1})$$
$$r_{n+1} = \frac{2}{3}r_n \quad \cdots\cdots ①$$

つまり，

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}} \quad \cdots ノハ\ (答)$$

①と $r_1 = 2$ より $r_k = 2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}$ となるから，円 O_k の面積は $\pi {r_k}^2 = 4\pi\left(\dfrac{4}{9}\right)^{k-1}$ である．よって，

$$\begin{aligned} S_{10} &= \sum_{k=1}^{10} 4\pi\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \\ &= 4\pi\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \\ &= 4\pi\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{10}}{1-\frac{4}{9}} \\ &= \frac{36}{5}\pi\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{10}\right\} \end{aligned}$$

を得る．ここで，$3.14 < \pi < 3.15$，$\dfrac{4}{9} < \dfrac{1}{2}$ より，

$$\begin{cases} S_{10} < \dfrac{36\pi}{5} < \dfrac{36\times 3.15}{5} = 22.68 \\ S_{10} > \dfrac{36\pi}{5}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\right\} > \dfrac{36\times 3.14}{5}\times\dfrac{1023}{1024} > 22.5 \end{cases}$$

よって，S_{10} の整数部分は $\boxed{22}$ $\quad\cdots$ ヒ (答)