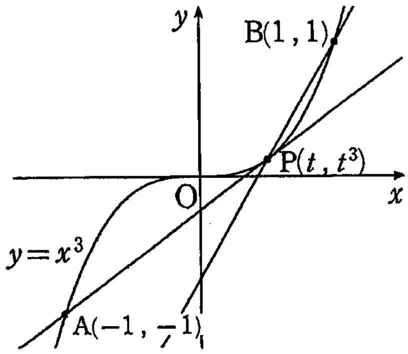
［I］



(1) (直線APの傾き)$=\dfrac{t^3-(-1)}{t-(-1)}$

$$=t^2-t+1$$

$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0.$$

(直線BPの傾き)$=\dfrac{t^3-1}{t-1}$

$$=t^2+t+1$$

$$=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0.$$

よって、$\tan\alpha=t^2-t+1$，$\tan\beta=t^2+t+1$.　…(答)

(2) $0<t$より$0<\tan\alpha<\tan\beta$であり，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$より，

$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$.　　よって，$0<\beta-\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

$\angle\mathrm{APB}=\pi-(\beta-\alpha)$であるから，

$$\tan\angle\mathrm{APB}=\tan\{\pi-(\beta-\alpha)\}$$

$$=-\tan(\beta-\alpha)$$

$$=-\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=-\frac{(t^2+t+1)-(t^2-t+1)}{1+(t^2+t+1)(t^2-t+1)}$$

$$=\frac{-2t}{t^4+t^2+2}.$$

…(答)

(3) $f(t)=\dfrac{-2t}{t^4+t^2+2}$ $(0<t<1)$とすると，

$$f'(t)=-2\cdot\frac{1\cdot(t^4+t^2+2)-t(4t^3+2t)}{(t^4+t^2+2)^2}$$

$$=\frac{2(3t^2-2)(t^2+1)}{(t^4+t^2+2)^2}$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}\,t+\sqrt{2})(\sqrt{3}\,t-\sqrt{2})(t^2+1)}{(t^4+t^2+2)^2}.$$

t	(0)	…	$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	…	(1)
$f'(t)$		−	0	+	
$f(t)$		↘		↗	

$0<t<1$における増減は右表のようになる.

$\dfrac{\pi}{2}<\angle\mathrm{APB}<\pi$であり，このとき$\angle\mathrm{APB}$が最小となるのは$\tan\angle\mathrm{APB}$が最小となるときであるから，$\angle\mathrm{APB}$が最小となる$t$の値は，$t=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.　…(答)

[II]

(1) $f(x)=x^4-x^2+1$において，

$$x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$$
$$x^6=(x^4-x^2+1)(x^2+1)-1$$
$$=f(x)(x^2+1)-1$$

より，x^6を$f(x)$で割ったときの余りは-1.　…(答)

(2) $x^{2021}=(x^6)^{336}\cdot x^5$

$$=\{f(x)(x^2+1)-1\}^{336}\cdot x^5$$
$$=\{f(x)A(x)+1\}x^5$$ （2項定理より）
$$=f(x)A(x)x^5+x^5$$
$$=f(x)\{A(x)x^5+x\}+x^3-x$$ （$A(x)$は整式）

よって、x^{2021}を$f(x)$で割った余りは、x^3-x。…(答)

(3) $n=3k$（kは自然数）とすると、

$$(x^2-1)^n-1=(x^2-1)^{3k}-1=(x^6-3x^4+3x^2-1)^k-1$$
$$=\{f(x)(x^2-2)+1\}^k-1$$
$$=f(x)B(x)+1-1$$ （2項定理より）
$$=f(x)B(x)$$ （$B(x)$は整式）

たしかに$f(x)$で割り切れる。　(証明終り)

【(1)の別解】

$$\begin{array}{r@{\,}l} & x^2+1 \\ x^4-x^2+1\ ) & x^6 \\ & \underline{x^6-x^4+x^2} \\ & \quad x^4-x^2 \\ & \quad \underline{x^4-x^2+1} \\ & \qquad\quad -1 \end{array}$$
…(答)

[II]（つづき1）

[(2), (3)の別解]

$f(x)=0$ の任意の解を α とおくと、(1)より、

$$\alpha^6=-1.$$

(2) x^{2021} を $f(x)$ で割った余りは実数係数の3次以下の整式で、

$$x^{2021}=f(x)\cdot Q(x)+ax^3+bx^2+cx+d$$

（a, b, c, d は実数, $Q(x)$ は整式）

と表される。

このとき、$x=\alpha$ とすると

$$\alpha^{2021}=(\alpha^6)^{336}\alpha^5=(-1)^{336}\alpha^5=\alpha^5$$

なので、

$$\alpha^5=a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d.$$

さらに、$f(\alpha)=0$ より $\alpha^4=\alpha^2-1$ で、

$$\alpha^5=\alpha\alpha^4=\alpha(\alpha^2-1)=\alpha^3-\alpha$$

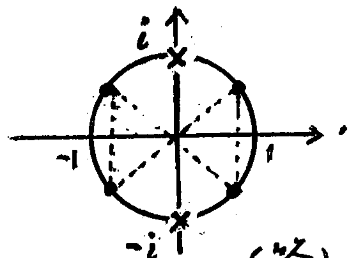
となり、

$$\alpha^3-\alpha=a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d. \quad \cdots(*)$$

α について、

$$x^6+1=(x^2+1)f(x)$$

より、α は $\pm i$ 以外の相異なる4個の -1 の6乗根になりうる。



よって、(*)より、

$$x^3-x=ax^3+bx^2+cx+d$$

は恒等式である。

余りは、　x^3-x.　…（答）

[II]（つづき 2）

(3)　$n=3k$（kは自然数）と表され，

$$(x^2-1)^n-1=(x^2-1)^{3k}-1 \quad (=g(x)\text{ とおく}).$$

このとき，

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= (\alpha^2-1)^{3k}-1 \\ &= (\alpha^4)^{3k}-1 \quad (f(\alpha)=0\text{ より}) \\ &= \alpha^{12k}-1 \\ &= (\alpha^6)^{2k}-1 \\ &= (-1)^{2k}-1 \\ &= 0. \qquad \cdots(**) \end{aligned}$$

$(**)$は $f(x)=0$ の任意の解αに対して成り立つから，

$g(x)$は$f(x)$で割り切れる．

（証明終り）

〔Ⅲ〕

(1)　$\alpha^2=(2+i)^2=3+4i$

$$\beta^2=\left(-\frac{1}{2}+i\right)^2=-\frac{3}{4}-i$$

より，$\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}=-\dfrac{1}{4}$ であるから，3点 C, D, O は一直線上にある．（証明終り）

(2) 直線 AB は虚部が 1 の直線なので，その上を動く点 P(z) は，t を実数として，$z=t+i$ で表される．よって，

$z^2=(t+i)^2=t^2-1+2ti$

したがって，

$x=t^2-1,\quad y=2t$

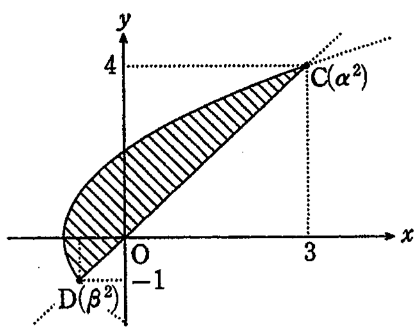
t を消去して，Q(z^2) の軌跡の方程式は，　$x=\dfrac{y^2}{4}-1$　　…（答）

(3) 点 γ が線分 AB 上を動くとき，$\gamma=t+i$ $\left(-\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 2\right)$ と表されるので，(2) で既に求めたように，点 γ^2 は曲線 $x=\dfrac{y^2}{4}-1$ 上の，$-1\leqq y\leqq 4$ の部分を動く．

点 P(z) が γ と 0 を結ぶ線分上を動くとき，$z=s\gamma$ $(0\leqq s\leqq 1)$ と表されて，

$z^2=s^2\gamma^2$ $(0\leqq s^2\leqq 1)$ となるので，z^2 は γ^2 と 0 を結ぶ線分上を動く．

よって，図形 K は図のようになる（(1)で確認したように，点Oは直線CD上にある）．



…（答）

(4) 直線CDの方程式は，xy 平面においては，$x=\dfrac{3}{4}y$．

よって，図形 K の面積は，y 方向で積分して次のように求まる．

$$\int_{-1}^{4}\left(\frac{3}{4}y-\frac{y^2}{4}+1\right)dy=-\frac{1}{4}\int_{-1}^{4}(y+1)(y-4)dy$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}(4+1)^3=\frac{125}{24}\quad\cdots（答）$$

[IV]

箱も玉も区別すると，ある玉をどの箱に入れるかそれぞれ n 通りずつあるので，

n 個の箱への k 個の玉の入れ方は n^k 通りあり，これらは同様に確からしい．

(1) $n=2$，$k=3$ のとき，玉の入れ方は 2^3 通りある．

箱に入る玉の数が a 個と b 個であるとき，$\{a, b\}$ と表すことにすると，3個の

玉の入り方は　$\{0, 3\}$，$\{1, 2\}$ である．

よって，$l=0$，2 となることはない．つまり $P_0=P_2=0$．

$l=1$ となるのは $\{1, 2\}$ のときであり，

どの箱に玉が1個入るか ${}_2C_1$ 通り，どの玉が入るか ${}_3C_1$ 通り

あるので，　$P_1=\dfrac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{2^3}=\dfrac{3}{4}$．

$l=3$ となるのは $\{0, 3\}$ のときであり，

どの箱に玉が3個入るか ${}_2C_1$ 通り

あるので，　$P_3=\dfrac{{}_2C_1}{2^3}=\dfrac{1}{4}$．

$P_0=0$，$P_1=\dfrac{3}{4}$，$P_2=0$，$P_3=\dfrac{1}{4}$．　…(答)

(2) (ア) $n=2$ のとき，$k=2$ から玉の入れ方は 2^2 通りある．

玉の入り方は $\{0, 2\}$，$\{1, 1\}$ である．

よって，$l=1$ となることはない．つまり $P_1=0$．

$l=0$ となるのは $\{1, 1\}$ のときであり，$P_0=\dfrac{2!}{2^2}=\dfrac{1}{2}$，

$l=2$ となるのは $\{0, 2\}$ のときであり　$P_2=\dfrac{2}{2^2}=\dfrac{1}{2}$．

(イ) $n\geqq 3$ とする．$k=2$ から玉の入れ方は n^2 通りある．

玉の入り方は $\{0, 0, \cdots, 0, 2\}$，$\{0, \cdots, 0, 1, 1\}$ である．

よって，$l=0$ となることはない．つまり $P_0=0$．

[IV]（つづき1）

$l=1$ となるのは $\{0, \cdots, 0, 1, 1\}$ のときであり，

どの箱に玉が入るか ${}_nC_2$ 通り，どの玉が入るか $2!$ 通り

あるので，$p_1=\dfrac{{}_nC_2\times 2!}{n^2}=\dfrac{n(n-1)}{n^2}=\dfrac{n-1}{n}$.

$l=2$ となるのは $\{0, \cdots, 0, 2\}$ のときであり，

どの箱に玉が入るか ${}_nC_1$ 通り

あるので，$p_2=\dfrac{{}_nC_1}{n^2}=\dfrac{1}{n}$.

以上により，

$$p_0=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (n=2)\\ 0 & (n\geqq 3)\end{cases},\quad p_1=\begin{cases}0 & (n=2)\\ \dfrac{n-1}{n} & (n\geqq 3)\end{cases},\quad p_2=\dfrac{1}{n}\ (n\geqq 2). \quad \cdots(答)$$

(3) (ウ) $n=3$ のとき，$k=3$ から玉の入れ方は 3^3 通りある．

玉の入り方は $\{0, 0, 3\}$, $\{0, 1, 2\}$, $\{1, 1, 1\}$ である．

よって，$l=1$ となることはない．つまり $p_1=0$.

$l=0$ となるのは $\{1, 1, 1\}$ のときであり，$p_0=\dfrac{3!}{3^3}=\dfrac{2}{9}$.

$l=2$ となるのは $\{0, 1, 2\}$ のときであり，

どの箱にどの玉を2個入れるか ${}_3C_1\times{}_3C_2$ 通り，残り2個の箱

のうち，どちらの箱に玉を入れるか ${}_2C_1$ 通り

あるので，$p_2=\dfrac{{}_3C_1\times{}_3C_2\times{}_2C_1}{3^3}=\dfrac{2}{3}$.

$l=3$ となるのは $\{0, 0, 3\}$ のときであり，$p_3=\dfrac{{}_3C_1}{3^3}=\dfrac{1}{9}$.

(エ) $n\geqq 4$ のとき，$k=3$ から玉の入れ方は n^3 通りある．

玉の入り方は $\{0, \cdots, 0, 3\}$, $\{0, \cdots, 0, 1, 2\}$, $\{0, \cdots, 0, 1, 1, 1\}$ である．

よって，$l=0$ となることはない．つまり $p_0=0$.

[IV]（つづき2）

$l=1$ となるのは $\{0,\cdots,0,1,1,1\}$ のときであり，

どの箱に玉を入れるか ${}_nC_3$ 通り，玉の入れ方は $3!$ 通り

あるので，$P_1=\dfrac{{}_nC_3\times 3!}{n^3}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{n^3}=\dfrac{(n-1)(n-2)}{n^2}$．

$l=2$ となるのは $\{0,\cdots,0,1,2\}$ のときであり，

どの箱にどの玉を2個入れるか ${}_nC_1\times{}_3C_2$ 通り，残り $n-1$ 個の

箱のうち，どの箱に残り1個の玉を入れるか ${}_{n-1}C_1$ 通り

あるので，$P_2=\dfrac{{}_nC_1\times{}_3C_2\times{}_{n-1}C_1}{n^3}=\dfrac{n\cdot 3\cdot(n-1)}{n^3}=\dfrac{3(n-1)}{n^2}$．

$l=3$ となるのは $\{0,\cdots,0,3\}$ のときであり

どの箱に玉を入れるか ${}_nC_1$ 通り

あるので，$P_3=\dfrac{{}_nC_1}{n^3}=\dfrac{1}{n^2}$．

以上により

$$P_0=\begin{cases}\dfrac{2}{9} & (n=3)\\ 0 & (n\geqq 4)\end{cases},\quad P_1=\begin{cases}0 & (n=3)\\ \dfrac{(n-1)(n-2)}{n^2} & (n\geqq 4)\end{cases},\quad P_2=\dfrac{3(n-1)}{n^2}\ (n\geqq 3),$$

$$P_3=\dfrac{1}{n^2}\quad (n\geqq 3).$$

…（答）

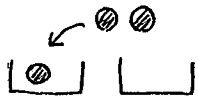
[IV]（つづき3）　乗法定理を用いた別解

箱に入る玉の数が a 個と b 個である場合，$\{a, b\}$ と表すことにする．

(1) $n=2$，$k=3$ のとき，玉の入り方は $\{0, 3\}$，$\{1, 2\}$ である．

よって，$l=0$，2 となることはなく $p_0=0$，$p_2=0$．

$l=3$ となるのは，あらかじめ1個の玉がいずれかの箱に入っているとすると，残りの2個を同じ箱に入れる場合であるから，



$$p_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

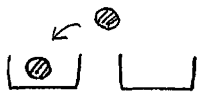
余事象から，$p_1 = 1-(p_0+p_2+p_3) = \frac{3}{4}$．よって，

$p_0 = 0$，$p_1 = \frac{3}{4}$，$p_2 = 0$，$p_3 = \frac{1}{4}$．　…（答）

(2)（ア）$n=2$，$k=2$ のとき，玉の入り方は $\{0, 2\}$，$\{1, 1\}$ である．

よって，$l=1$ となることはなく，$p_1 = 0$．

$l=2$ となるのは，(1)と同様に考えると，玉の入った箱に残りの玉を入れるときなので，$p_2 = \frac{1}{2}$．

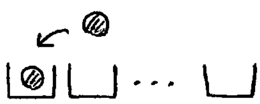


余事象から　$p_0 = 1-(p_1+p_2) = \frac{1}{2}$．

（イ）$n \geqq 3$，$k=2$ のとき，玉の入り方は $\{0, \cdots, 0, 2\}$，$\{0, \cdots, 0, 1, 1\}$ である．

よって，$l=0$ となることはなく　$p_0 = 0$．

$l=2$ となるのは，玉の入った箱を選んで残りの玉を入れるときなので，$p_2 = \frac{1}{n}$．



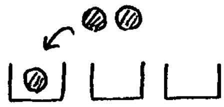
余事象から　$p_1 = 1-(p_0+p_2) = 1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$．

$$p_0 = \begin{cases} \frac{1}{2} & (n=2) \\ 0 & (n \geqq 3) \end{cases},\quad p_1 = \begin{cases} 0 & (n=2) \\ \frac{n-1}{n} & (n \geqq 3) \end{cases},\quad p_2 = \frac{1}{n}\ (n \geqq 2).$$　…（答）

[IV] (つづき4)

(3) (ウ) $n=3$, $k=3$ のとき, 玉の入り方は $\{0,0,3\}$, $\{0,1,2\}$, $\{1,1,1\}$ である.

よって, $l=1$ となることはなく $p_1=0$.



$l=3$ となるのは, 同じ箱に玉が入るときなので,

$$p_3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

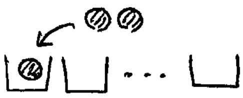
$l=0$ となるのは, すべての玉が異なる箱に入るときなので,

$$p_0=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}.$$

余事象から $p_2=1-(p_0+p_1+p_3)=\frac{2}{3}$.

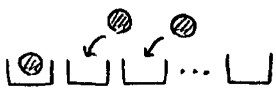
(エ) $n\geqq 4$, $k=3$ のとき 玉の入り方は $\{0,\cdots,0,3\}$, $\{0,\cdots,0,1,2\}$, $\{0,\cdots,0,1,1,1\}$ である.

よって, $l=0$ となることはなく $p_0=0$.



$l=3$ となるのは, 同じ箱に玉が入るときなので,

$$p_3=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}.$$



$l=1$ となるのは, すべての玉が異なる箱に入るときなので,

$$p_1=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n}=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}.$$

余事象から $p_2=1-(p_0+p_1+p_3)=1-\frac{1}{n^2}-\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}=\frac{3(n-1)}{n^2}$.

よって

$$p_0=\begin{cases}\frac{2}{9} & (n=3)\\ 0 & (n\geqq 4)\end{cases},\quad p_1=\begin{cases}0 & (n=3)\\ \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} & (n\geqq 4)\end{cases},\quad p_2=\frac{3(n-1)}{n^2}\ (n\geqq 3),$$

$$p_3=\frac{1}{n^2}\ (n\geqq 3).$$

…(答)

V.

1辺の長さが1の正四面体で考えてよい。

(1) Mは正三角形ABCの外心なので重心と一致するから

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

Dは球面S上にあるから $|\overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{MA}|$ より，

$$\left|\overrightarrow{OD} - \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right| = \left|\frac{2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}}{3}\right|. \quad \cdots ①$$

Dは線分OA上にあるから

$$\overrightarrow{OD} = k\vec{a} \quad (0<k<1). \quad \cdots ②$$

①, ②より，

$$\left|k\vec{a} - \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right| = \left|\frac{2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}}{3}\right|.$$

よって，$|(3k-1)\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}|^2 = |2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}|^2.$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \frac{1}{2}$ より

$$(3k-1)^2 - 2(3k-1) = 0.$$

$$(3k-1)(3k-3) = 0.$$

$0<k<1$ より，$k = \frac{1}{3}.$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\vec{a}. \quad \cdots(答)$$

同様に

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\vec{b},\ \overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}\vec{c}. \quad \cdots(答)$$

V（つづき1）

GはMから平面OABに下ろした垂線の足であり，

$$\overrightarrow{OG}=s\vec{a}+t\vec{b}\quad(s,\ t\in\mathbb{R})$$

と表され，

$$\overrightarrow{MG}=s\vec{a}+t\vec{b}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.\quad\cdots③$$

$\overrightarrow{MG}\perp$ 平面OAB より $\begin{cases}\overrightarrow{MG}\cdot\vec{a}=0\\ \overrightarrow{MG}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$ となるから，③より，

$$\begin{cases}s+\frac{1}{2}t-\frac{2}{3}=0\\ \frac{1}{2}s+t-\frac{2}{3}=0\end{cases}$$

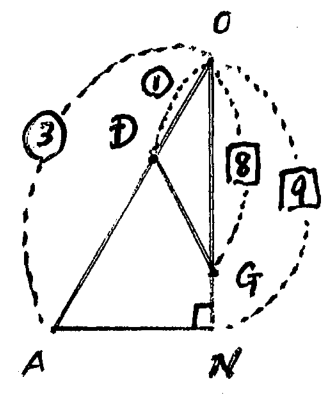
すなわち $s=t=\frac{4}{9}$.

よって，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{4}{9}(\vec{a}+\vec{b}).\quad\cdots(答)$$

(2)　ABの中点をNとすると，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{8}{9}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{8}{9}\overrightarrow{ON}.$$



これと(1)より，

$$\triangle ODG=\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{9}\triangle OAN$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{2}\triangle OAB$$
$$=\frac{4}{27}\triangle OAB$$

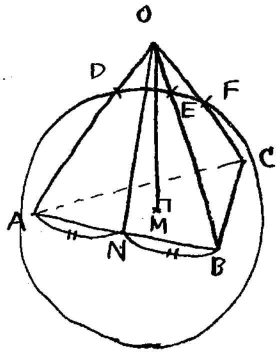
よって，

$$S_2=2\cdot\frac{4}{27}S_1$$

となり，

$$S_1:S_2=27:8.\quad\cdots(答)$$

[V]（つづき2）［(1)の別解］



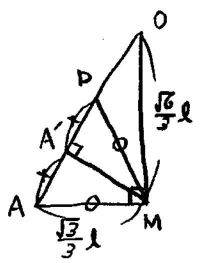
正四面体の一辺の長さを $l\ (>0)$ とおく.

このとき、正弦定理より.

$$2AM=\frac{AB}{\sin 60^\circ}$$

$$AM=\frac{l}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}l$$

よって. $OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{l^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}l\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}l$



条件より. $MA=MD$ となるので、ADの中点をA' とおくと、$A'M\perp OA$ となる よって. $\triangle OMA'$ の $\triangle MAA'$ での三角形の面積比を考えると、

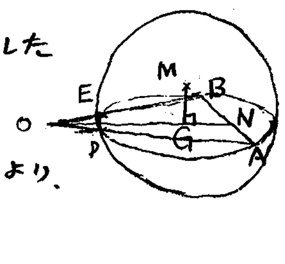
$$OA':A'A=(\triangle OMA'):(\triangle MAA')=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}l\right)^2:\left(\frac{\sqrt{3}}{3}l\right)^2=2:1 \quad \text{—☆}$$

となり、D, A' は OAの3等分点となる.

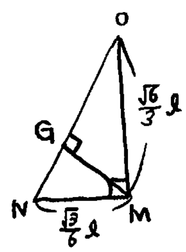
以上より、$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\vec{a}$, 　…（答）

同様にして. $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\vec{b}$、 $\overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\vec{c}$. 　…（答）

また. Gは4点 A, B, D, E を通る円の中心なので、この円は球Sと平面OABとの交円. よってGは. Mから平面OABへ下ろした垂線となる.



ABの中点をNとおくと、平面ONCにおける対称性より、Gは ON上に存在する.



$ON=\frac{\sqrt{3}}{2}l$ より、 $MN=\sqrt{ON^2-OM^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}l\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}l$

よって. 相似な三角形の面積比を考えると.（☆と同様）

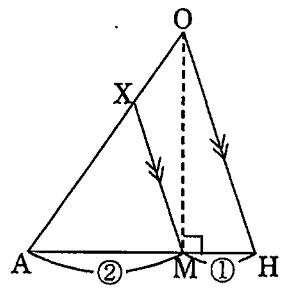
$$OG:GN=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}l\right)^2:\left(\frac{\sqrt{3}}{6}l\right)^2=8:1$$

となるので、

$$\overrightarrow{OG}=\frac{8}{9}\overrightarrow{ON}=\frac{8}{9}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}. \quad \text{…（答）}$$

〔V〕(つづき3)

（1）の別解その２［重心の図形的性質を用いた解法。平行線をいくつか引く。］



辺BCの中点をHとすると, AH = HO.
Mは, 三角形ABCの重心なので, 線分AHを 2:1 に内分する点.
MからOHに平行な直線をひいて, 辺ＯＡとの交点をXとすると,
△AMX ∽ △AHO になるので, AM = MX.
Mを中心とし半径がAMの球面 S とAOとの交点が点Dなので,
点Xが点Dに他ならない.
このとき, AD : DO = AM : MH = 2 : 1 .

したがって, , $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\vec{a}$.　同様に, $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}\vec{b}$,　$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}\vec{c}$.　… (答)

また, 辺ABの中点をNとし, 点Cから平面OABに下ろした垂線の足をＪとする.
点Ｊは三角形OABの重心なので, OJ : JN = 2 : 1 .
弧DEを含む円周の中心Gは, Mから平面OABに下ろした垂線の足なので,
JG :GN = CM : MN = 2 : 1
よって, OG : GN = $2+\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=8:1$

したがって,　$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\times\frac{8}{9}=\frac{4}{9}(\vec{a}+\vec{b})$　… (答)