1

(1)　$f(x)=x^4+5x^3-3x^2+4x+2$ とおくと，$f(x)$ は実数係数の多項式であるから，$f(x)=0$ が $x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ を解にもてば，それと共役な $x=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ も解にもつ．

よって，因数定理より，$f(x)$ は

$$\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)=x^2-x+1$$

で割り切れ，実際に割ると

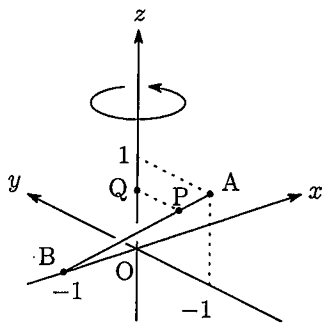
$$f(x)=(x^2-x+1)(x^2+6x+2)$$

となるから，$f(x)=0$ の実数解は，2 次方程式 $x^2+6x+2=0$ の解であり，

$$x=-3\pm\sqrt{7}\,.$$

…(答)

(2)



線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転してできる面を K とする．$0\leqq t\leqq 1$ を満たす実数 t に対して，平面 $z=t$ と K の交わりは，平面 $z=t$ と線分 AB の交点 P を z 軸のまわりに 1 回転してできる図形であるから，点 Q$(0,\ 0,\ t)$ を中心とする半径 PQ の円である．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-1,\ 0,\ 0)$ より，線分 AB 上の点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-k,\ k-1,\ 1-k)\quad (k\text{ は実数})$$

と表せ，P は平面 $z=t$ の上にあるから，$t=1-k$ である．

よって，$k=1-t$ より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(t-1,\ -t,\ t)$ となり，これと $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(0,\ 0,\ t)$ より，求める立体の平面 $z=t$ による切り口の面積 $S(t)$ は，

$$\begin{aligned}S(t)&=\pi\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2\\&=\pi\{(t-1)^2+(-t)^2+0^2\}\\&=\pi(2t^2-2t+1)\,.\end{aligned}$$

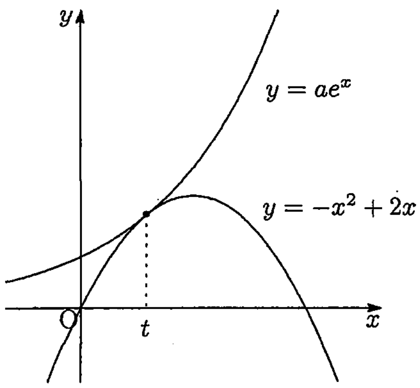
$\boxed{1}$（つづき 1）

したがって，求める体積 V は，

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 S(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \pi(2t^2-2t+1)\,dt \\
&= \pi\left[\frac{2}{3}t^3-t^2+t\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}\pi\,.
\end{aligned}
$$

$\cdots$(答)

(3)



$f(x)=ae^x$, $g(x)=-x^2+2x$ とおくと，$f'(x)=ae^x$, $g'(x)=-2x+2$ であるから，2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が共有点もち，かつ，その共有点において共通の接線をもつ条件は，

$$
\begin{cases} f(t)=g(t)\,, \\ f'(t)=g'(t) \end{cases} \quad \text{すなわち，} \quad \begin{cases} ae^t=-t^2+2t\,, & \cdots① \\ ae^t=-2t+2 & \cdots② \end{cases}
$$

を満たす実数 t が存在することである．

①，②より ae^t を消去すると

$$
\begin{gathered}
-t^2+2t=-2t+2\,, \\
t^2-4t+2=0\,, \\
t=2\pm\sqrt{2}
\end{gathered}
$$

となるが，$-2t+2=ae^t>0$ より $t<1$ であるから，$t=2-\sqrt{2}$ と定まる．これを②に代入・整理して，

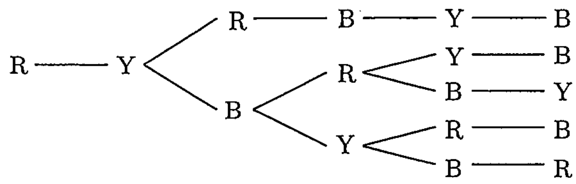
$$
a=(-2t+2)e^{-t}=\left(2\sqrt{2}-2\right)e^{-2+\sqrt{2}}\,.
$$

$\cdots$(答)

1 （つづき 2）

(4)　赤玉，黄玉，青玉をそれぞれ R，Y，B と表し，6 個の箱を左から 1，2，3，4，5，6 の番号の順に並べて考える．

例えば，1，2 の箱に入れた玉がこの順に R，Y である場合，隣り合う番号の箱に異なる色の玉が入る入れ方は次の樹形図のようになる．

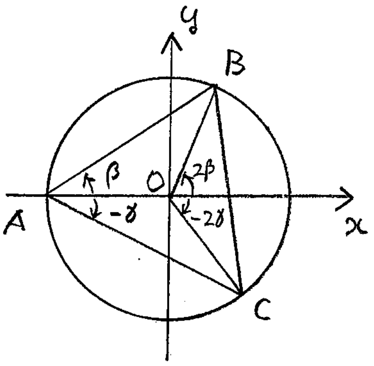


これは全部で 5 通りあり，1，2 の箱に入れた玉がこの順に R，Y である場合以外も同様であるから，

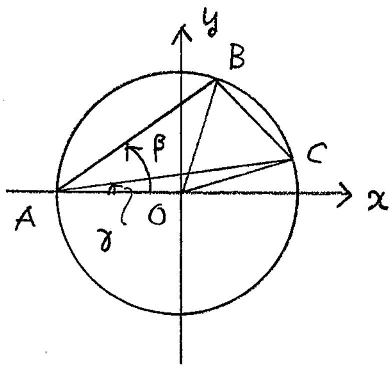
$$5 \times {}_3\mathrm{P}_2 = 30\ (\text{通り}).$$

…(答)

$\boxed{2}$ (1)



(ア)



(イ)

(ア) 直線OAに関してB, Cが異なる側（もしくはBかCがOA上）にあるとき,

$0 \leqq \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$ として

$\overrightarrow{OA} = (-1, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (\cos 2\beta, \sin 2\beta)$, $\overrightarrow{OC} = (\cos(-2\gamma), \sin(-2\gamma)) = (\cos 2\gamma, -\sin 2\gamma)$

とする. このとき,

$\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = (-1 + b\cos 2\beta + c\cos 2\gamma,\ b\sin 2\beta - c\sin 2\gamma) = \vec{0}$

から
$$\begin{cases} -1 + b\cos 2\beta + c\cos 2\gamma = 0 & \cdots ① \\ b\sin 2\beta - c\sin 2\gamma = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

$\gamma \neq 0$ のとき, ②から $c = \dfrac{\sin 2\beta}{\sin 2\gamma} b$ $\cdots$②′, ①に代入して,

$$\left(\cos 2\beta + \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\gamma} \cdot \cos 2\gamma\right) b = 1$$

$$\frac{\sin 2\gamma \cos 2\beta + \cos 2\gamma \sin 2\beta}{\sin 2\gamma} b = 1$$

$$\frac{\sin(2\gamma + 2\beta)}{\sin 2\gamma} b = 1.$$

ここで, $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ とすると, BCが直径となり $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. このとき,

$\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c(-\overrightarrow{OB}) = \vec{0}$ から $\overrightarrow{OA} = (c - b)\overrightarrow{OB}$ となり三角形ABCは

成立しない. したがって, $\beta + \gamma \neq \frac{\pi}{2}$ から $\sin(2\beta + 2\gamma) \neq 0$ であり

$b = \dfrac{\sin 2\gamma}{\sin(2\beta + 2\gamma)}$. ②′から $c = \dfrac{\sin 2\beta}{\sin(2\beta + 2\gamma)}$

$\boxed{2}$ (つづき1)

また，$b=0,\ c=1$ とすると $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ から AC が直径となり $\gamma=0$．よって，これらの $b,\ c$ は $\gamma=0$ でも成り立つ．$b=0,\ c=1$ として，$\beta=0$ でも成り立つ．

(イ) 直線 OA に関して B, C が同じ側にあるとき，
(ア) の $b,\ c$ において，γ を $-\gamma$ に（あるいは β を $-\beta$ に）おきかえることにより

$$b=\frac{\sin(-2\gamma)}{\sin(2\beta-2\gamma)}=-\frac{\sin 2\gamma}{\sin(2\beta-2\gamma)},\quad c=\frac{\sin 2\beta}{\sin(2\beta-2\gamma)}.$$

以上 (ア)(イ) より

直線 OA に関して B, C が異なる側にあるとき，

$$b=\frac{\sin 2\gamma}{\sin(2\beta+2\gamma)},\quad c=\frac{\sin 2\beta}{\sin(2\beta+2\gamma)}$$

直線 OA に関して B, C が同じ側にあるとき，

$$b=-\frac{\sin 2\gamma}{\sin(2\beta-2\gamma)},\quad c=\frac{\sin 2\beta}{\sin(2\beta-2\gamma)}$$

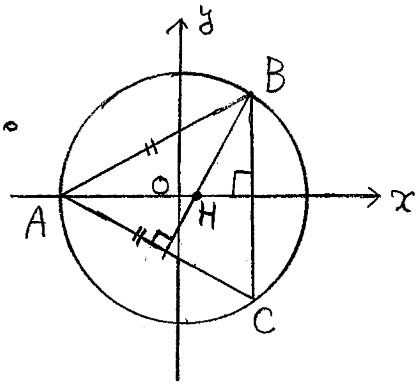
…(答)

2 （つづき2）

（2）

$b=c$ なので，$AB=AC$ である。
よって△ABCは二等辺三角形
であるから，垂心Hは直線OA
上にある。よって

$$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OA}$$



と表せる。

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より

$$(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0$$

$$(k\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0$$

$$k\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-k|\overrightarrow{OA}|^2-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \quad\cdots \text{＃}$$

ここで 問題より　$\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+b\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ なので

$$|\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OC}|^2=|b\overrightarrow{OB}|^2$$

$$1+2b\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+b^2=b^2$$

よって $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-\dfrac{1}{2b}$

同様に $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{1-2b^2}{2b^2}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{1}{2b}$

が得られるのでこれを＃に代入して

$$k\left(-\frac{1}{2b}\right)-k-\frac{1-2b^2}{2b^2}-\frac{1}{2b}=0$$

$$\left(-\frac{1}{2b}-1\right)k=\frac{1-2b^2}{2b^2}+\frac{1}{2b}$$

通分すると，$-\dfrac{2b+1}{2b}k=\dfrac{-(2b+1)(b-1)}{2b^2}$

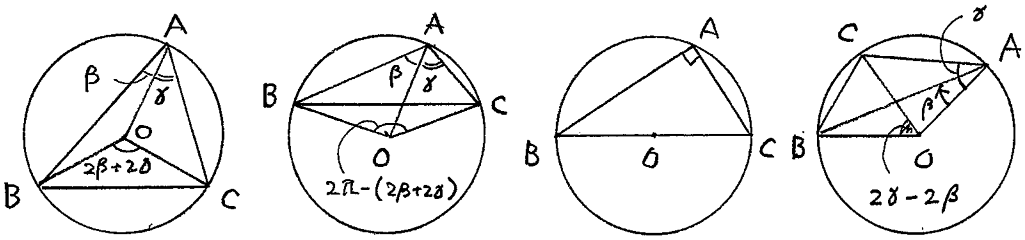
$$k=\frac{b-1}{b}$$

よって $\overrightarrow{OH}=\dfrac{b-1}{b}\overrightarrow{OA}$ $\cdots$（答）

（$b=-\frac{1}{2}$ のとき△ABCができないので $b\neq-\frac{1}{2}$ である）

2 （つづき３）　(1)の内積を用いた別解

(1)



$\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ となる．このとき $\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ は

$$\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c(-\overrightarrow{OB})=\vec{0}\quad \text{すなわち}\quad \overrightarrow{OA}=(c-b)\overrightarrow{OB}$$

となり三角形ABCが成立しない．よって，$\beta+\gamma\neq\frac{\pi}{2}$ で考える．

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot1\cdot\cos(\pi-2\beta)=-\cos2\beta,$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1\cdot1\cdot\cos(\pi-2\gamma)=-\cos2\gamma.$$

(ア) $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ のなす角が $2\beta+2\gamma$，または $2\pi-(2\beta+2\gamma)$ のとき，

$\cos(2\pi-(2\beta+2\gamma))=\cos(2\beta+2\gamma)$ から，いずれの場合も

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=1\cdot1\cdot\cos(2\beta+2\gamma)=\cos(2\beta+2\gamma).$$

よって，

$$\begin{cases}(\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OB}=0\\(\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OC}=0,\end{cases}\ \text{より}\ \begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+b|\overrightarrow{OB}|^2+c\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\\\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+b\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+c|\overrightarrow{OC}|^2=0.\end{cases}$$

したがって，

$$\begin{cases}-\cos2\beta+b+c\cdot\cos(2\beta+2\gamma)=0 & \cdots ①\\-\cos2\gamma+c+b\cdot\cos(2\beta+2\gamma)=0 & \cdots ②\end{cases}$$

を得る．

$\boxed{2}$ (つづき4)

①+②より $\{1+\cos(2\beta+2\gamma)\}(b+c)=\cos2\beta+\cos2\gamma$

$$2\cos^2(\beta+\gamma)\times(b+c)=2\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)$$

$$b+c=\frac{\cos(\beta-\gamma)}{\cos(\beta+\gamma)}\quad\cdots③\qquad\left(\beta+\gamma\neq\frac{\pi}{2}\right)$$

①−②より $\{1-\cos(2\beta+2\gamma)\}(b-c)=\cos2\beta-\cos2\gamma$

$$2\sin^2(\beta+\gamma)\times(b-c)=-2\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)$$

$$b-c=\frac{-\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)}\quad\cdots④$$

③+④より
$$2b=\frac{\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta+\gamma)}$$

$$=\frac{\sin\{(\beta+\gamma)-(\beta-\gamma)\}}{\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta+\gamma)}=\frac{2\sin2\gamma}{\sin(2\beta+2\gamma)}$$

③−④より
$$2c=\frac{\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta+\gamma)}$$

$$=\frac{\sin\{(\beta+\gamma)+(\beta-\gamma)\}}{\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta+\gamma)}=\frac{2\sin2\beta}{\sin(2\beta+2\gamma)}$$

したがって，
$$b=\frac{\sin2\gamma}{\sin(2\beta+2\gamma)},\quad c=\frac{\sin2\beta}{\sin(2\beta+2\gamma)}$$

(イ) $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ のなす角が $2\gamma-2\beta$，あるいは $2\beta-2\gamma$ のとき，

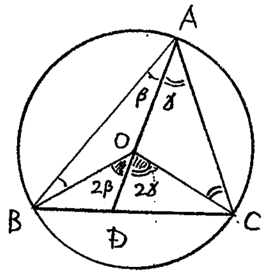
$\cos(2\gamma-2\beta)=\cos(2\beta-2\gamma)$ であるから，(ア)の b，c において γ を $-\gamma$ に(あるいは β を $-\beta$ に)おきかえることにより

直線 OA に関して B，C が異なる側にあるとき，
$$b=\frac{\sin2\gamma}{\sin(2\beta+2\gamma)},\quad c=\frac{\sin2\beta}{\sin(2\beta+2\gamma)}$$
直線 OA に関して，B，C が同じ側にあるとき，
$$b=-\frac{\sin2\gamma}{\sin(2\beta-2\gamma)},\quad c=\frac{\sin2\beta}{\sin(2\beta-2\gamma)}$$
…(答)

$\boxed{2}$ (つづき5)

(参考) 三角形ABCが鋭角三角形のとき、次のようにできる。(鋭角三角形でない場合も同様の考え方でb, cを求めることができる)

直線AOとBCの交点をDとする．



$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\triangle\mathrm{OAB}:\triangle\mathrm{OAC}$$
$$=\sin(\pi-2\beta):\sin(\pi-2\gamma)=\sin 2\beta:\sin 2\gamma$$
$$\mathrm{AO}:\mathrm{OD}=(\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{OBC}):\triangle\mathrm{OBC}$$
$$=(\sin 2\beta+\sin 2\gamma):\sin(2\beta+2\gamma)$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\frac{\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{\sin(2\beta+2\gamma)}$$

$$=-\frac{\sin 2\gamma\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\sin 2\beta\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\sin 2\beta+\sin 2\gamma}\cdot\frac{\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{\sin(2\beta+2\gamma)}=-\frac{\sin 2\gamma\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\sin 2\beta\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\sin(2\beta+2\gamma)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\sin 2\gamma}{\sin(2\beta+2\gamma)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\sin 2\beta}{\sin(2\beta+2\gamma)}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

よって，

$$b=\frac{\sin 2\gamma}{\sin(2\beta+2\gamma)}\quad,\quad c=\frac{\sin 2\beta}{\sin(2\beta+2\gamma)}$$

$\boxed{3}$

(1)　求める範囲は，$y=x^3-2ax+a^2$ に $x=\frac{1}{2}$ を代入したときの a の関数

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^3-2a\cdot\frac{1}{2}+a^2=a^2-a+\frac{1}{8}$$

が $0\leqq a\leqq 1$ においてとり得る値の範囲に等しい．

このとき $y=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$ であり，$a=0,\ 1$ のとき $y=\frac{1}{8}$ であるから，求める範囲は，

$$-\frac{1}{8}\leqq y\leqq\frac{1}{8}.\qquad\cdots(答)$$

(2)　領域 A を図示することを考える．点 $(x,\ y)$ が A に属する条件は，x を $0\leqq x\leqq 1$ の範囲の実数として固定したときの a の関数

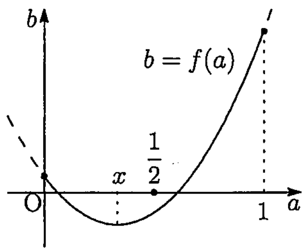
$$y=x^3-2ax+a^2=a^2-2xa+x^3$$

が $0\leqq a\leqq 1$ においてとり得る値の範囲に y が属すことである．

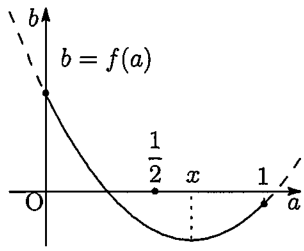
$f(a)=a^2-2xa+x^3$ とおくと

$$f(a)=(a-x)^2+x^3-x^2$$

であるから，関数 $b=f(a)$ の $0\leqq a\leqq 1$ におけるグラフは次の図のようになる．



$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ のとき



$\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき

よって，b のとり得る値の範囲は

$$\begin{cases} f(x)\leqq b\leqq f(1) & \left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\text{のとき}\right), \\ f(x)\leqq b\leqq f(0) & \left(\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1\text{のとき}\right) \end{cases}$$

すなわち，

$$\begin{cases} x^3-x^2\leqq b\leqq x^3-2x+1 & \left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\text{のとき}\right), \\ x^3-x^2\leqq b\leqq x^3 & \left(\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1\text{のとき}\right) \end{cases}$$

$\boxed{3}$（つづき）

であるから，この範囲に $b=y$ が属す条件を求めて，A を表す不等式

$$A\ :\ \begin{cases} x^3-x^2 \leqq y \leqq x^3-2x+1 & \left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\text{のとき}\right), \\ x^3-x^2 \leqq y \leqq x^3 & \left(\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1\text{ のとき}\right) \end{cases}$$

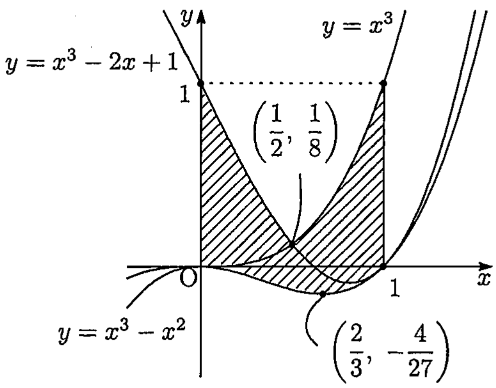
を得る．また，関数 $y=x^3-x^2$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における増減については，

$$y'=3x^2-2x=x(3x-2)$$

より，次の表のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y		↘	$-\frac{4}{27}$	↗	

これより，領域 A を図示すると次図の斜線部分（境界含む）のようになる．



したがって，A に属する点の y 座標の最小値は

$$-\frac{4}{27} \qquad \cdots(\text{答})$$

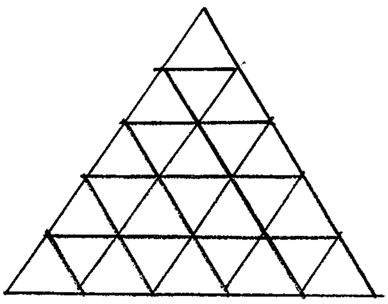
である．

(3)　(2) で図示した領域 A の面積 S は，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{x^3-2x+1-(x^3-x^2)\right\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left\{x^3-(x^3-x^2)\right\} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (x-1)^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{7}{12}. \end{aligned} \qquad \cdots(\text{答})$$

4

(1)



($n=5$のとき)

上向きの三角形について

1辺の長さが 1のものは $1+2+3+4+5=15$ (個)

1辺の長さが 2のものは $1+2+3+4=10$ (個)

〃 が 3のものは $1+2+3=6$ (個)

〃 が 4のものは $1+2=3$ (個)

〃 が 5のものは 1 (個)

下向きの三角形について

1辺の長さが 1のものは $1+2+3+4=10$ (個)

1辺の長さが 2のものは $1+2=3$ (個)

であるから，正三角形の総数は $35+13=48$ (個)…(答)

(2) 上向きの三角形について

1辺の長さが 1のものは $1+2+\cdots\cdots+n$ (個)

1辺の長さが 2のものは $1+2+\cdots\cdots+(n-1)$ (個)

⋮

1辺の長さが $(n-1)$ のものは $1+2$ (個)

1辺の長さが n のものは 1 (個)

であるので，1辺の長さが $(n-k+1)$ の正三角形（下から k 段目）について

$$1+2+\cdots\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$ より

4 （つづき1）

これらの総数は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)=-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)k(k+1)-k(k+1)(k+2)\}$$

$$=-\frac{1}{6}\{(0\cdot1\cdot2-\cancel{1\cdot2\cdot3})+(\cancel{1\cdot2\cdot3}-\cancel{2\cdot3\cdot4})+\cancel{\cdots}\cdots+(\cancel{(n-1)n(n+1)}-n(n+1)(n+2)\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\quad\cdots(答)$$

(3)

(i) $n=2m$（偶数）のとき

1辺の長さが1の正三角形は $1+2+\cdots+(2m-1)$（個）
1辺の長さが2の正三角形は $1+2+\cdots+(2m-3)$（個）
⋮
1辺の長さが$(m-1)$の正三角形は $1+2+3$（個）
1辺の長さが m の正三角形は 1（個）

あるので，1辺の長さが$(m-k+1)$の正三角形（下からk段目）について

$$1+2+\cdots+(2k-1)=\frac{1}{2}(2k-1)\times2k=2k^2-k\ より$$

$$\sum_{k=1}^{m}(2k^2-k)=\frac{1}{3}m(m+1)(2m+1)-\frac{1}{2}m(m+1)$$

$$=\frac{1}{6}m(m+1)(4m-1)$$

$m=\frac{n}{2}$ より

$$=\frac{1}{6}\times\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(4\times\frac{n}{2}-1\right)$$

$$=\frac{1}{24}n(n+2)(2n-1)$$

$\boxed{4}$ （つづき２）

(ii) $n=2m-1$ （奇数）のとき $(m \geqq 2)$

1辺の長さが 1 の正三角形は $1+2+\cdots\cdots+(2m-2)$（個）
1辺の長さが 2 の正三角形は $1+2+\cdots+(2m-4)$（個）
⋮
1辺の長さが $(m-1)$ の正三角形は $1+2$（個）

あるので，1辺の長さが $(m-k+1)$ の正三角形
（下から $(k-1)$ 段目）について　$1+2+\cdots+(2k-2)=\frac{1}{2}(2k-2)(2k-1)$
$=2k^2-3k+1$
$(k \geqq 2)$

より，総数は

$$\sum_{k=2}^{m}(2k^2-3k+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(2k^2-3k+1)$$

$$=\frac{1}{3}m(m+1)(2m+1)-3\times\frac{1}{2}m(m+1)+m$$

$$=\frac{1}{6}m\{2(m+1)(2m+1)-9(m+1)+6\}$$

$$=\frac{1}{6}m(4m^2-3m-1)$$

$$=\frac{1}{6}m(m-1)(4m+1)$$

$m=\frac{n+1}{2}$ より

$$=\frac{1}{6}\times\frac{n+1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\left(4\times\frac{n+1}{2}+1\right)$$

整理すると，

$$=\frac{1}{24}(n+1)(n-1)(2n+3)$$

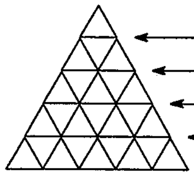
以上より求める総数は

n が偶数のとき　$\frac{1}{24}n(n+2)(2n-1)$
n が奇数のとき　$\frac{1}{24}(n-1)(n+1)(2n+3)$　…（答）

$\boxed{4}$（つづき 3）

【(2) の別解】

各正三角形の底辺を含む直線を，
図のように上から順に L_1, L_2, L_3, $\cdots$ とする．



n 段積んだときの上向きの正三角形の総数を a_n とする．$a_1 = 1$ である．
階差数列 $a_{n+1} - a_n$ を考えると，これは底辺が L_{n+1} に含まれるような上向きの正三角形の総数に等しく，

1 辺の長さが 1 の上向きの正三角形が $n+1$ 個，
1 辺の長さが 2 の上向きの正三角形が n 個，

$\vdots$

1 辺の長さが n の上向きの正三角形が 2 個，
1 辺の長さが $n+1$ の上向きの正三角形が 1 個

ある．これらの和をとって，

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1) + n + \cdots + 2 + 1 \\ &= \frac{(n+1)+1}{2} \times (n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\ . \end{aligned}$$

よって，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\{a_{k+1} - a_k\} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}(k+1)(k+2) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3) - \frac{1}{6}k(k+1)(k+2)\right\} \\ &= 1 + \left\{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\right\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

であり，$n = 1$ のときは $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) = 1$ となって a_1 に一致するから，まとめて，

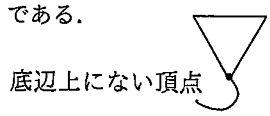
$$a_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\ . \qquad \cdots(\text{答})$$

4 （つづき 4）

【(3) の別解】

n 段積んだときの下向きの正三角形の総数を b_n とする．$b_1=0$，$b_2=1$ である．

階差数列 $b_{n+1}-b_n$ を考えると，これは底辺上にない頂点が L_{n+1} に含まれるような下向きの正三角形の総数に等しい．



(2) と同様に，正三角形の 1 辺の長さごとに個数を求めて和をとると，
$n=2k-1$ （奇数）のときは

$$\begin{aligned} b_{2k}-b_{2k-1} &= (2k-1)+(2k-3)+\cdots+3+1 \\ &= \frac{(2k-1)+1}{2}\times k \\ &= k^2 \end{aligned}$$

であり，$n=2k$ （偶数）のときは

$$\begin{aligned} b_{2k+1}-b_{2k} &= 2k+(2k-2)+\cdots+4+2 \\ &= \frac{2k+2}{2}\times k \\ &= k^2+k \end{aligned}$$

となる．

よって，一般項 b_n は，$n=2m-1$ （奇数）かつ $n \geqq 3$ のとき，

$$\begin{aligned} b_{2m-1} &= b_1+\sum_{k=1}^{m-1}\{b_{2k}-b_{2k-1}\}+\sum_{k=1}^{m-1}\{b_{2k+1}-b_{2k}\} \\ &= 0+\sum_{k=1}^{m-1}k^2+\sum_{k=1}^{m-1}(k^2+k) \\ &= \frac{1}{6}(m-1)m(2m-1)+\frac{1}{6}(m-1)m(2m-1)+\frac{1}{2}(m-1)m \\ &= \frac{1}{6}(m-1)m(4m+1) \\ &= \frac{1}{24}(n-1)(n+1)(2n+3) \quad \left(m=\frac{n+1}{2}\text{より}\right) \end{aligned}$$

であり，$n=1$ のときは $\frac{1}{24}(n-1)(n+1)(2n+3)=0$ となって b_1 に一致する．

$\boxed{4}$（つづき5）

次に $n=2m$（偶数）かつ $n \geqq 4$ のときは，

$$\begin{aligned} b_{2m} &= b_1 + \sum_{k=1}^{m}\{b_{2k}-b_{2k-1}\} + \sum_{k=1}^{m-1}\{b_{2k+1}-b_{2k}\} \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{m} k^2 + \sum_{k=1}^{m-1}(k^2+k) \\ &= \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) + \frac{1}{6}(m-1)m(2m-1) + \frac{1}{2}(m-1)m \\ &= \frac{1}{6}m(m+1)(4m-1) \\ &= \frac{1}{24}n(n+2)(2n-1) \quad \left(m=\frac{n}{2}\text{より}\right) \end{aligned}$$

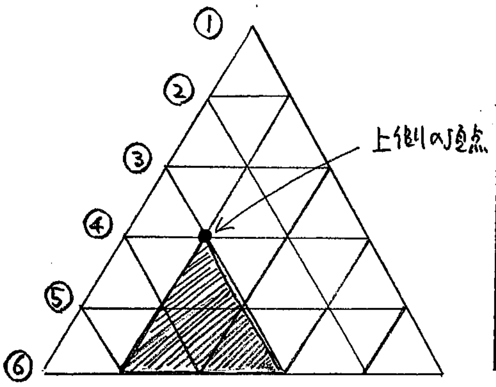
であり，$n=2$ のときは $\frac{1}{24}n(n+2)(2n-1)=1$ となって b_2 に一致する．

以上をまとめて，

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{24}(n-1)(n+1)(2n+3) & (n\text{ が奇数のとき}), \\ \frac{1}{24}n(n+2)(2n-1) & (n\text{ が偶数のとき}). \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

4 （つづき６）［(1)の別解］

(1) (ア) 上向きの正三角形について，上側の頂点に着目する．



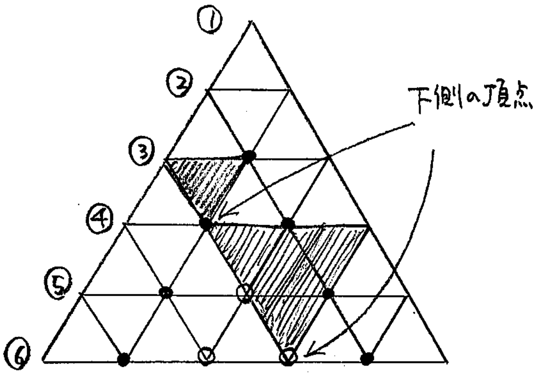
段	頂点の数	lの範囲	上向き正三角形の個数
①	1	$1\leqq l\leqq 5$	$1\times 5=5$
②	2	$1\leqq l\leqq 4$	$2\times 4=8$
③	3	$1\leqq l\leqq 3$	$3\times 3=9$
④	4	$1\leqq l\leqq 2$	$4\times 2=8$
⑤	5	$l=1$	$5\times 1=5$

上の図のように段に①,②,③,… と番号をつける．また，正三角形の一辺の長さを l とすると，頂点の数と l のとり得る値から上の表を得る．

したがって，5段積んだときの上向きの正三角形の個数は

$$5+8+9+8+5=35$$

(イ) 下向きの正三角形について，下側の頂点に着目する．



● を頂点としたものは $l=1$

○ を頂点としたものは $1\leqq l\leqq 2$.

● は7個，○ は3個あるので．

下向きの正三角形の個数は

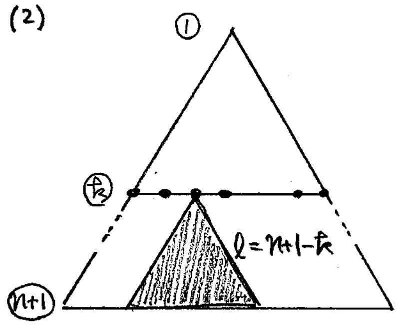
$$7\times 1+3\times 2=13$$

(ウ) (イ)から，5段積んだときの正三角形の総数は

$$35+13=48 \qquad \cdots(答)$$

4 (つづき7) [(2),(3)の別解2]

(2)



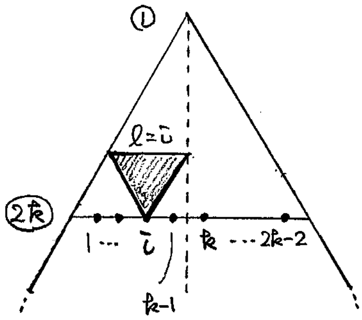
ⓚ段 ($k=1, 2, \cdots, n$) の頂点はk個あり，それぞれの点を頂点とする正三角形について

$$1 \leqq l \leqq n+1-k$$

なので，n段積んだときの上向きの正三角形の総数は

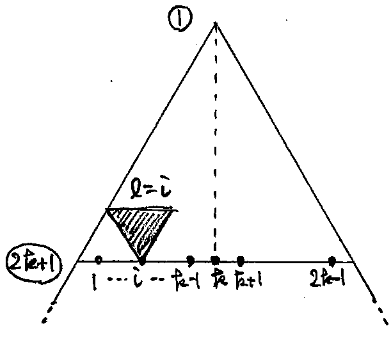
$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot(n+1-k) = -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \quad \cdots(\text{答})$$

(3)



(2k)段 ($k \geqq 2$) の頂点は$2k-2$個あり，左からi番目 ($i=1, 2, \cdots, k-1$) の正三角形と右からi番目の正三角形について，$1 \leqq l \leqq i$ なので，この段に頂点をもつものは

$$2\sum_{i=1}^{k-1} i = 2\cdot\frac{1}{2}(k-1)k = (k-1)k \ (\text{個})$$

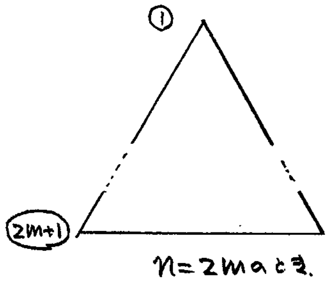


(2k+1)段 ($k \geqq 1$) の頂点は$2k-1$個あり，左からi番目 ($i=1, 2, \cdots, k$) の正三角形と右からi番目の正三角形について，$1 \leqq l \leqq i$ なので，この段に頂点をもつものは

$$2\sum_{i=1}^{k} i - k = 2\cdot\frac{1}{2}k(k+1)-k = k^2 \ (\text{個})$$

4 （つづき8）

mを正の整数とする。下向きの正三角形の総数は



$n=2m$のとき

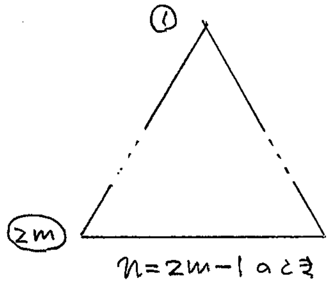
$$\sum_{k=2}^{m}(k-1)k+\sum_{k=1}^{m}k^2 \qquad (m \geqq 2)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(k-1)k+\sum_{k=1}^{m}k^2$$

$$=2\times\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)-\frac{1}{2}m(m+1)$$

$$=\frac{1}{6}m(m+1)(4m-1) \qquad (\text{これは } m=1 \text{ で成り立つ})$$

$n=2m-1$のとき、上の結果を用いて



$$\frac{1}{6}m(m+1)(4m-1)-m^2$$

$$=\frac{1}{6}m(m-1)(4m+1)$$

したがって、下向きの正三角形の総数は

$$\begin{cases} \dfrac{1}{24}n(n+2)(2n-1) & (n\text{は偶数}) \\ \dfrac{1}{24}(n-1)(n+1)(2n+3) & (n\text{は奇数}) \end{cases}$$