〔1〕

$$C_1 : x^2-2x+y^2+4y-11=0, \qquad \cdots①$$
$$C_2 : x^2-8x+y^2-4y+k=0. \qquad \cdots②$$

②は,

$$(x-4)^2+(y-2)^2=20-k$$

と変形できるから,C_2 が円となるとき,$k<20$ である.

(1) C_1, C_2 の中心をそれぞれ A,B, 半径をそれぞれ r_1, r_2 とすると,

$$\mathrm{A}(1,\ -2),\quad \mathrm{B}(4,\ 2),\quad \mathrm{r_1}=4,\quad \mathrm{r_2}=\sqrt{20-\mathrm{k}}.$$

C_1, C_2 が外接するから,

$$\mathrm{AB}=\mathrm{r_1}+\mathrm{r_2} \Longleftrightarrow 5=4+\sqrt{20-\mathrm{k}} \qquad \cdots③$$

が成り立つ.③より,

$$k=19.\quad (k<20 \text{ を満たす}) \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) (1) より,$r_2=1$ であるから,2 円 C_1, C_2 の接点 P は線分 AB を $r_1 : r_2 = 4 : 1$ に内分する. よって,P の座標は,

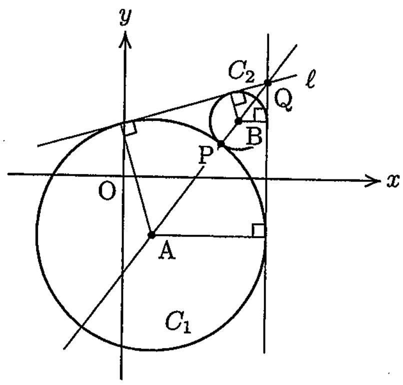
$$\left(\frac{1\cdot1+4\cdot4}{4+1}, \frac{1\cdot(-2)+4\cdot2}{4+1}\right)=\left(\frac{17}{5}, \frac{6}{5}\right). \qquad \cdots(\text{答})$$

(3)
2 円 $C_1.C_2$ の共通外接線の交点 Q は,

$$\mathrm{AQ}:\mathrm{BQ}=\mathrm{r_1}:\mathrm{r_2}=4:1$$

より,Q は線分 AB を 4 : 1 に外分する.
よって,Q の座標は

$$\left(\frac{-1\cdot1+4\cdot4}{4-1}, \frac{-1\cdot(-2)+4\cdot2}{4-1}\right)=\left(5, \frac{10}{3}\right). \qquad \cdots(\text{答})$$



(参考)

Q を通る直線のうち,$x=5$ は 2 円に接している. 他方の接線 (ℓ とする) の傾きを m とし, $\ell : y=m(x-5)+\dfrac{10}{3}$ とする.ℓ が C_2 に接するとき,B と ℓ に点と直線の距離の公式を用いて, $\dfrac{|m\cdot4-5m+\frac{10}{3}-2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$ より, $m=\dfrac{7}{24}$ を得る.
よって,Q を通り 2 つの円に接する 2 本の直線の方程式は,

$$x=5,\quad ,y=\frac{7}{24}x+\frac{15}{8}.$$

〔2〕

(1)　$t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$

ここで，　$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$　であるから，　$-\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$

ゆえに，　$-1 < t \leqq \sqrt{2}$　……①　…(答)

(2)　$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)^3 - 3(\sin\theta + \cos\theta)\sin\theta\cos\theta$

ここで，　$t^2 = (\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin\theta^2 + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

よって，　$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$

したがって，　$\sin^3\theta + \cos^3\theta = t^3 - 3t \cdot \frac{1}{2}(t^2 - 1) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$　…(答)

また，　$\cos 4\theta = 1 - 2\sin^2 2\theta$

ここで，　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = t^2 - 1$　であるから，

$\cos 4\theta = 1 - 2(t^2 - 1)^2 = -2t^4 + 4t^2 - 1$　…(答)

(3)　$\sin^3\theta + \cos^3\theta = \cos 4\theta$　より

$-\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t = -2t^4 + 4t^2 - 1$

$4t^4 - t^3 - 8t^2 + 3t + 2 = 0$

$(t-1)^2(4t^2 + 7t + 2) = 0$

$t = 1,\ \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{8}$

①より，　$t = 1,\ \frac{-7 + \sqrt{17}}{8}$　…(答)

〔3〕

(1)　$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k+5 \\ k+5 \end{pmatrix}$

点Sは平面ABC上より、実数 α, β を用いると、

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\alpha+2\beta-2 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \cdots ①$$

よって、$\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 2\alpha+2\beta-2-k \\ \alpha-k-5 \\ \beta-k-5 \end{pmatrix}$ であるので、

$\overrightarrow{RS} \perp$ (平面ABC) より、

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 5\alpha+4\beta-9-3k=0 \\ 4\alpha+5\beta-9-3k=0 \end{cases}$$

辺々引くと、$\alpha-\beta=0$

$\therefore\ \alpha=\beta$

これより、$\alpha=\beta=\dfrac{k}{3}+1$

よって①より、$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}k+2 \\ \frac{k}{3}+1 \\ \frac{k}{3}+1 \end{pmatrix}$ であるので、

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}k+4 \\ \frac{k}{3}+1 \\ \frac{k}{3}+1 \end{pmatrix} = \frac{k+3}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots\text{(答)}$$

〔3〕(つづき)

(2) 点Sが$\triangle ABC$の内部または周にある条件は，

$\alpha \geqq 0$ かつ $\beta \geqq 0$ かつ $\alpha+\beta \leqq 1$ である．

$\alpha \geqq 0$ かつ $\beta \geqq 0$ より，$\frac{k}{3}+1 \geqq 0$

$\therefore\ k \geqq -3 \quad \cdots②$

$\alpha+\beta \leqq 1$ より，$\frac{2}{3}k+2 \leqq 1$

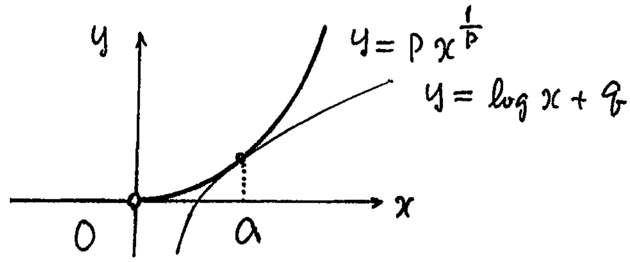
$\therefore\ k \leqq -\frac{3}{2} \quad \cdots③$

②かつ③より，求めるkの値の範囲は，

$$-3 \leqq k \leqq -\frac{3}{2} \quad \cdots(答)$$

[4]

(1)



$C_1 : y = px^{\frac{1}{p}}$ より　$y' = x^{\frac{1}{p}-1}$

$C_2 : y = \log x + q$ より　$y' = \frac{1}{x}$

いま C_1, C_2 が x 座標が a である点を共有し，しかもその点における接線の傾きが一致するので

$$\begin{cases} pa^{\frac{1}{p}} = \log a + q & \cdots ① \\ a^{\frac{1}{p}-1} = \frac{1}{a} & \cdots ② \end{cases}$$

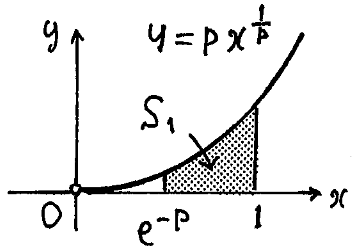
②より　$a^{\frac{1}{p}} = 1$　$\left(\frac{1}{p} > 1\right)$ を得るので　$a = 1$

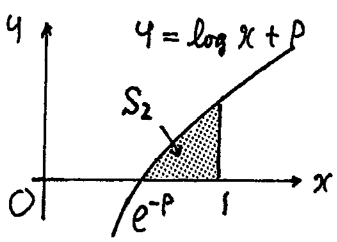
すると ① から　$q = p$　…(答)

(2)　C_2 の方程式において $y = 0$ とすると

$$\log x = -q \ (= \log e^{-q}) \qquad \text{よって} \quad x = e^{-q}$$

したがって S_1 と S_2 はそれぞれ次の網目の部分の面積となる。





よって

$$S_1 = \int_{e^{-p}}^{1} px^{\frac{1}{p}}\,dx = \left[\frac{p}{1+\frac{1}{p}}x^{1+\frac{1}{p}}\right]_{e^{-p}}^{1} = \frac{p^2}{p+1}\left(1 - e^{-p-1}\right)$$

…(答)

$$S_2 = \int_{e^{-p}}^{1} (\log x + p)\,dx = \left[x(\log x - 1) + px\right]_{e^{-p}}^{1}$$

$$= (-1+p) - \left\{e^{-p}(-p-1) + pe^{-p}\right\} = p - 1 + e^{-p}$$

…(答)

[4]（つづき 1）

(3) $2.5<e<3$ から $\dfrac{3}{e}>1$ となるので

$$4S_2-3S_1=4(p-1)+4e^{-p}-\frac{3p^2}{p+1}+\frac{3p^2}{p+1}\cdot e^{-p-1}$$
$$=\frac{4(p^2-1)-3p^2}{p+1}+4e^{-p}+\frac{3}{e}\cdot\frac{p^2}{p+1}\cdot e^{-p}$$
$$\geqq\frac{p^2-4}{p+1}+4e^{-p}+1\cdot\frac{p^2}{p+1}e^{-p}$$
$$=\frac{(p-2)(p+2)}{p+1}+\frac{(p+2)^2}{p+1}e^{-p}$$
$$=\frac{p+2}{p+1}\left\{p-2+(p+2)e^{-p}\right\}$$

そこで $f(x)=x-2+(x+2)e^{-x}$ とおく.

$$f'(x)=1+e^{-x}-(x+2)e^{-x}=1-(x+1)e^{-x}$$
$$\therefore\ f''(x)=-e^{-x}+(x+1)e^{-x}=xe^{-x}$$

よって $x>0$ のとき $f''(x)>0$ となり $x\geqq0$ で $f'(x)$ は単調に増加する. $f'(0)=0$ と合わせ

$$x>0 \text{ のとき } f'(x)>0$$

よって $x\geqq0$ で $f(x)$ は単調増加. $f(0)=0$ と合わせ

$$x>0 \text{ のとき } f(x)>0$$

いま $0<p<1$ であるので $f(p)>0$. したがって

$$4S_2-3S_1\geqq\frac{p+2}{p+1}f(p)\geqq0$$

となる. $S_1>0$ を考慮して

$$\frac{S_2}{S_1}\geqq\frac{3}{4}$$

（証明終り）

[4]（つづき2）

【参考】(3) を次のように解答することもできる．

$F(p) = 4S_2 - 3S_1$ とおくと

$$F(p) = 4(p-1+e^{-p}) - 3\cdot\frac{p^2}{p+1}\{1-e^{-(p+1)}\}$$

$$\therefore F'(p) = 4(1-e^{-p}) - 3\left[\frac{2p(p+1)-p^2}{(p+1)^2}\{1-e^{-(p+1)}\} + \frac{p^2}{p+1}e^{-(p+1)}\right]$$

$$= 4(1-e^{-p}) - 3\cdot\frac{(p^2+2p)(e^{p+1}-1)+p^2(p+1)}{(p+1)^2e^{p+1}}$$

$$= 4\cdot\frac{e^p-1}{e^p} - 3\,\frac{(p^2+2p)e^{p+1}+p^3-2p}{(p+1)^2e^{p+1}}$$

$$= \frac{4e(p+1)^2(e^p-1)-3(p^2+2p)e^{p+1}-3(p^3-2p)}{(p+1)^2e^{p+1}}$$

$$= \frac{(p^2+2p+4)e^{p+1}-4e(p+1)^2-3(p^3-2p)}{(p+1)^2e^{p+1}}$$

この分子を $G(p) = (p^2+2p+4)e^{p+1} - 4e(p+1)^2 - 3(p^3-2p)$ とおく．

$$G'(p) = (2p+2)e^{p+1} + (p^2+2p+4)e^{p+1} - 8e(p+1) - 3(3p^2-2)$$

$$= (p^2+4p+6)e^{p+1} - 8e(p+1) - 3(3p^2-2)$$

$$\therefore G''(p) = (2p+4)e^{p+1} + (p^2+4p+6)e^{p+1} - 8e - 18p$$

$$= (p^2+6p+10)e^{p+1} - 8e - 18p$$

$$\therefore G'''(p) = (2p+6)e^{p+1} + (p^2+6p+10)e^{p+1} - 18$$

$$= (p^2+8p+16)e^{p+1} - 18 = (p+4)^2e^{p+1} - 18$$

$p>0$ と $e>2.5$ を用いると　$G'''(p) > 4^2\times2.5^1 - 18 > 0$

$G''(0) = 2e > 0$ と合わせて　$p>0$ において　$G''(p)>0$．

$G'(0) = 6-2e > 6-2\cdot3 = 0$ と合わせて　$p>0$ のとき $G'(p)>0$

$G(0)=0$ と合わせ　$p>0$ のとき　$G(p)$ と $F'(p)$ は正．

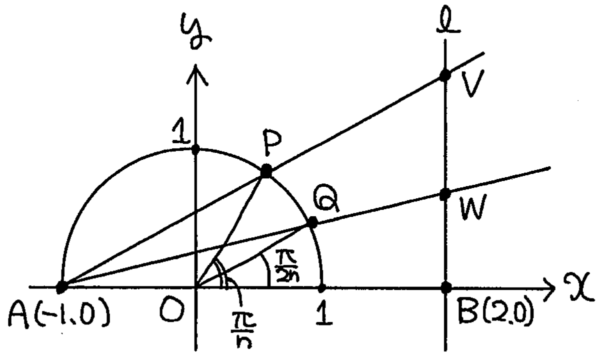
したがって　$p\geqq0$ の範囲で　$F(p)$ は単調に増加する．

さらに $F(0)=0$ であるので，$0<p<1$ の範囲で

$$F(p) = 4S_2 - 3S_1 \geqq 0$$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} \geqq \frac{3}{4}$$

〔5〕



(1) 点Aは、原点を中心とする半径1の円の周上より、

$$\angle PAB = \frac{1}{2}\angle POB = \frac{\pi}{2n}$$

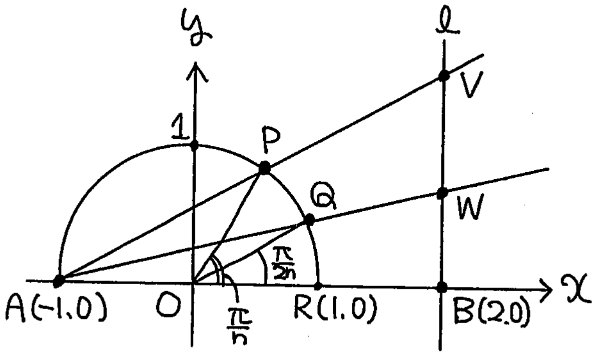
$$\angle QAB = \frac{1}{2}\angle QOB = \frac{\pi}{4n}$$

よって、$VW = VB - WB = 3\tan\frac{\pi}{2n} - 3\tan\frac{\pi}{4n}$.

$$\begin{aligned}
\therefore\ S(n)+T(n) &= (\triangle AVW の面積) \\
&= \frac{1}{2}\times VW\times AB \\
&= \frac{1}{2}\times\left(3\tan\frac{\pi}{2n} - 3\tan\frac{\pi}{4n}\right)\times 3 \\
&= \frac{9}{2}\left(\tan\frac{\pi}{2n} - \tan\frac{\pi}{4n}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \lim_{n\to\infty} n\{S(n)+T(n)\} &= \frac{9}{2}\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{\pi}{2n} - n\tan\frac{\pi}{4n}\right) \\
&= \frac{9}{2}\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{\pi}{2n}} - n\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\cos\frac{\pi}{4n}}\right) \\
&= \frac{9}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2n}} - \frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}}\cdot\frac{\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{2n}}\right) \\
&= \frac{9}{2}\left(1\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{1} - 1\cdot\frac{\frac{\pi}{4}}{1}\right) \\
&= \frac{9}{8}\pi \qquad \cdots（答）
\end{aligned}$$

〔5〕（つづき）



(2)　R(1,0) とすると，

$$S(n)=\begin{pmatrix}\triangle OAP\\ \text{の面積}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{扇形}OPQ\\ \text{の面積}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\triangle OAQ\\ \text{の面積}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)+\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\left(\pi-\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{4n}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nS(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}\sin\frac{\pi}{n}-\frac{n}{2}\sin\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}-\frac{n}{2}\cdot\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot1-\frac{\pi}{4}\cdot1+\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{S(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\{S(n)+T(n)\}-S(n)}{S(n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{S(n)+T(n)\}-nS(n)}{nS(n)}$$

$$=\frac{\frac{9}{8}\pi-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{5}{4}$$　…（答）

〔6〕

(1) $AB = |\omega - 1| = \left|-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{3}$

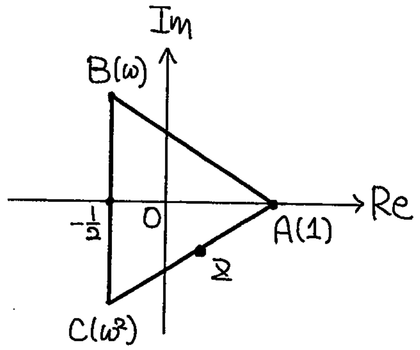
$AC = |\omega^2 - 1| = \left|\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}\right)-1\right| = \left|-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{3}$

$BC = |\omega^2 - \omega| = |\omega|\cdot|\omega - 1| = 1\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}$

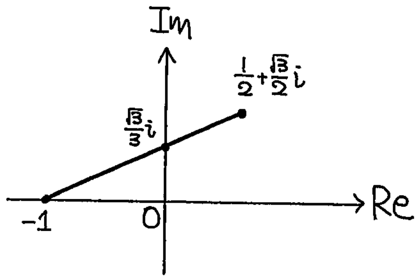
よって $AB=AC=BC$ より $\triangle ABC$ は正三角形である．

（証明終り）

(2)



点 $-z$ は，点 z と原点に関して対称であるので，
点 $-z$ が描く図形は，下図の太線部分となる．



・・・（答）

(3) 辺AB上を動く点を z_1 とし，辺AC上を動く点を z_2 とする．
E_1 と E_2 との共有点は，$z_1^2 = z_2^2$ を満たす．
よって，$z_1 = z_2$ または $z_1 = -z_2$ が成り立つ．
$z_1 = z_2$ を満たすのは，$z_1 = z_2 = 1$ のときである．
$z_1 = -z_2$ を満たすのは，(2)より $-z_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}i$ のときである．
ゆえに，E_1 と E_2 の共有点は，

2点，1，$-\frac{1}{3}$ である．　・・・（答）