1

$$48k+18l=m \quad \cdots\cdots(*)$$

(1) 与えられた整数 m に対し，$(*)$ が整数解 $(k,\ l)$ をもつための必要十分条件は

$$\boxed{\boldsymbol{m}\text{ が }\mathbf{6}\text{ の倍数であること}} \quad \cdots[答]$$

である．

(2) $(*)$ が整数解 $(k,\ l)$ をもつとき，$m=6(8k+3l)$ と表せて，$k,\ l$ が整数であることより $8k+3l$ は整数であるから，m は6の倍数である．

逆に，m が6の倍数であるとき，$m=6M$（M は整数）とおくことにより，$(*)$ は

$$8k+3l=M$$

と同値である．この方程式は，$(k,\ l)=(-M,\ 3M)$ という整数解をもち，これはもとの $(*)$ の整数解でもある．

よって，上の (1) で記した空欄の条件は必要十分条件である．

[証明おわり]

(3) $m=540$ のときの $(*)$ は，

$$8k+3l=90 \quad \cdots①$$

と同値である．

ここで，

$$8\cdot 0+3\cdot 30=90 \quad \cdots②$$

が成り立つから，①－② より，

$$8k+3(l-30)=0$$

$$8k=3(30-l)$$

8 と 3 は互いに素であるから，$k,\ l$ が整数であれば

$$\begin{cases} k=3N, \\ 30-l=8N \end{cases} \quad (N\text{ は整数})$$

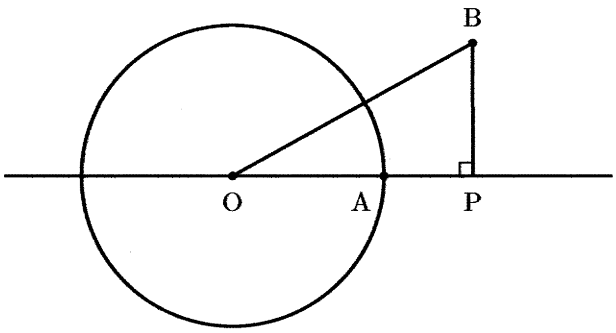
とおける．すなわち，

$$\begin{cases} k=3N, \\ l=30-8N \end{cases} \quad (N\text{ は整数})$$

さらに，$k,\ l$ が正の整数となるのは $N=1,\ 2,\ 3$ のときであるから，求めるものは，

$$\boldsymbol{(k,\ l)=(3,\ 22),\ (6,\ 14),\ (9,\ 6)} \quad \cdots[答]$$

2



(1) 与条件より，A$(x,\ y,\ z)$ について，

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad \cdots①$$

P は直線 OA 上の点だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(kx,\ ky,\ kz)\quad (k\ \text{は実数})$$

と表せる．

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(kx-1,\ ky-1,\ kz-1)$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=x(kx-1)+y(ky-1)+z(kz-1)=0$$

$$k(x^2+y^2+z^2)=x+y+z$$

これと ① より，

$$k=x+y+z$$

である．よって，

$$\mathrm{P}\Big((x+y+z)x,\ (x+y+z)y,\ (x+y+z)z\Big)$$

となり，

$$\mathrm{OP}=\sqrt{(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)}=|x+y+z|\quad (①\ \text{より})$$

また，

$$\begin{aligned}\mathrm{BP}&=\sqrt{\Big\{(x+y+z)x-1\Big\}^2+\Big\{(x+y+z)y-1\Big\}^2+\Big\{(x+y+z)z-1\Big\}^2}\\&=\sqrt{(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)-2(x+y+z)(x+y+z)+3}\\&=\sqrt{(x+y+z)^2-2(x+y+z)^2+3}\quad (①\ \text{より})\\&=\sqrt{3-(x+y+z)^2}\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ （続き）

三角形 OBP を OP を軸として一回転させてできる立体は，底面の円の半径が BP で高さが OP の直円錐であるから，

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \mathrm{BP}^2 \cdot \mathrm{OP}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{3}|x+y+z|\left\{3-(x+y+z)^2\right\}} \quad \cdots[答]$$

(2) ① のもとで $x+y+z=t$ とおくことにより，

$$V = \frac{\pi}{3}|t|(3-t^2)$$

$f(t)=|t|(3-t^2)$ と定めると，$t>0$ のとき

$$f(t) = -t^3+3t, \quad f'(t) = 3(1-t^2)$$

であるから，$t \geqq 0$ における $f(t)$ の増減は次のようになる．

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$	0	↗	2	↘

$f(t)$ は偶関数であることに注意すれば，$f(t)$ は $t=\pm 1$ のときに最大値 2 をとる．
$t=1$ は $x+y+z=1$ のことであり，これは ① のもとで起こり得る．
$t=-1$ は $x+y+z=-1$ のことであり，これも ① のもとで起こり得る．
以上のことから，

$$V \text{ の最大値は } \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi} \quad \cdots[答]$$

であり，そのときに x, y, z の満たす関係式は，

$$\boldsymbol{x+y+z=1} \text{ または } \boldsymbol{x+y+z=-1} \quad \cdots[答]$$

である．

$\boxed{3}$

(1) y 軸に平行な直線が C_a と接することはないので，l の方程式は $y=px+q$ とおくことができる．

$$ax^2+\frac{1}{a}=px+q \iff ax^2-px+\frac{1}{a}-q=0\ (a \neq 0)$$

について，

$$(\text{判別式})=p^2-4a\left(\frac{1}{a}-q\right)=0$$

$$4qa+p^2-4=0$$

これが $a\ (\neq 0)$ についての恒等式となればよいから，

$$q=0,\quad p=\pm 2$$

よって，l の方程式は，

$$\boldsymbol{y=2x} \text{ および } \boldsymbol{y=-2x} \quad \cdots[\text{答}]$$

(2) 平面上の点 $(X,\ Y)$ が，$C_a\ (a \geqq 1)$ の通過領域に含まれるための条件は，

$$Y=aX^2+\frac{1}{a}$$

すなわち

$$X^2a^2-Ya+1=0 \quad \cdots(*)$$

が，$a \geqq 1$ の範囲に少なくとも 1 つの解をもつことである．

(i) $X=0$ のとき：

$(*)$ は $Ya=1 \iff a=\dfrac{1}{Y}$

よって，$\dfrac{1}{Y} \geqq 1$ であればよいから，$0<Y \leqq 1$

(ii) $X \neq 0$ のとき：

$$f(a)=X^2a^2-Ya+1=X^2\left(a-\frac{Y}{2X^2}\right)^2-\frac{Y^2}{4X^2}+1$$

とおいて考えると，

(ア) $\dfrac{Y}{2X^2} \leqq 1$ のときは，$f(1)=X^2-y+1 \leqq 0$ であればよい．

まとめると，

$$Y \leqq 2X^2 \text{ かつ } Y \geqq X^2+1$$

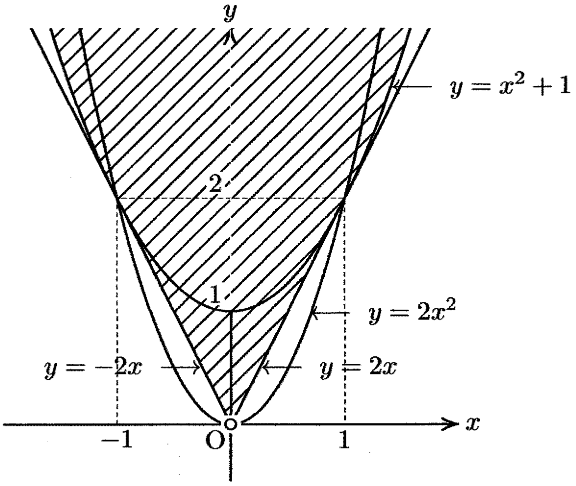
(イ) $\dfrac{Y}{2X^2} \geqq 1$ のときは，$-\dfrac{Y^2}{4X^2}+1 \leqq 0$ であればよい．

まとめると，

$$Y \geqq 2X^2 \text{ かつ } Y \geqq 2X \text{ かつ } Y \geqq -2X$$

$\boxed{3}$（続き）

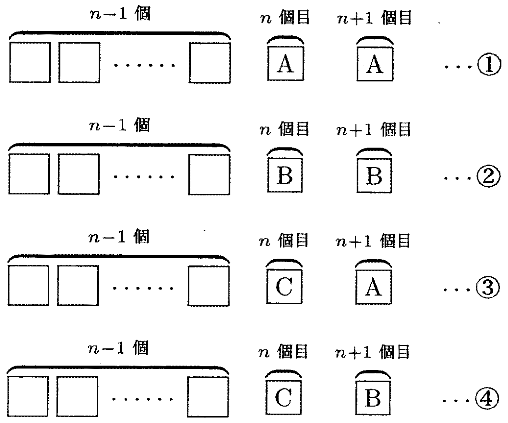
以上より，C_a $(a \geqq 1)$ の通過領域は，次図の斜線部分（境界線を含む．ただし，y 軸上は $0 < y \leqq 1$ の部分のみを含む）．



…[答]

$\boxed{4}$

(1) $n+1$ 番目が A または B のものは，次の 4 種類に分類される．



① と ② は，n 個を並べたときの g_n 通りのうち，n 個目が A であるものについては $n+1$ 個目に A を置き，n 個目が B であるものについては $n+1$ 個目に B を置いたものであるから，合わせて g_n 通りである．

また，③ と ④ を合わせると $2h_n$ 通りである．

よって，

$$\boldsymbol{g_{n+1} = g_n + 2h_n} \quad (n \geqq 1) \quad \cdots[\text{答}]$$

$n+1$ 番目が C のとき，n 番目は「A または B」または C であるから，

$$\boldsymbol{h_{n+1} = g_n + h_n} \quad (n \geqq 1) \quad \cdots[\text{答}]$$

(2) $f_n = g_n + h_n \ (n \geqq 1)$ と (1) の結果により，

$$f_{n+1} = g_{n+1} + h_{n+1} = 2g_n + 3h_n$$

さらに，

$$\begin{aligned} f_{n+2} &= 2g_{n+1} + 3h_{n+1} \\ &= 2(g_n + 2h_n) + 3(g_n + h_n) \\ &= 5g_n + 7h_n \\ &= 2(2g_n + 3h_n) + g_n + h_n \end{aligned}$$

すなわち，

$$\boldsymbol{f_{n+2} = 2f_{n+1} + f_n} \quad (n \geqq 1) \quad \cdots[\text{答}]$$

4 (続き)

(3) $f_n \fallingdotseq 0$ $(n \geqq 1)$ だから，(2) で求めた漸化式の両辺を f_{n+1} で割れば，

$$\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = 2 + \frac{f_n}{f_{n+1}}$$

すなわち

$$a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n} \quad \cdots ⑤$$

ここで，$a_1 = \dfrac{f_2}{f_1} = \dfrac{7}{3}$，$a_2 = \dfrac{f_3}{f_2} = \dfrac{17}{7}$ より，$a_2 - a_1 = \dfrac{2}{21}$ であり，⑤ より，

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_{n+1}} - \left(2 + \frac{1}{a_n}\right) = -\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1}}$$

$a_n > 0$ であることにも注意すれば，$a_{n+2} - a_{n+1}$ と $a_{n+1} - a_n$ は符号が異なることになる．
これと $a_2 - a_1 > 0$ より，

- n が奇数のとき：

$$a_{n+1} - a_n > 0$$

- n が偶数のとき：

$$a_{n+1} - a_n < 0$$

以上より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \text{ が奇数のときは } \boldsymbol{a_{n+1} > a_n}, \\ \boldsymbol{n} \text{ が偶数のときは } \boldsymbol{a_{n+1} < a_n} \end{cases} \quad \cdots [答]$$