1

$$48k+18l=m \quad \cdots\cdots(*)$$

(1) 与えられた整数 m に対し，$(*)$ が整数解 $(k,\ l)$ をもつための必要十分条件は

$$\boxed{m\text{ が 6 の倍数であること}} \quad \cdots[\text{答}]$$

である．

(2) $(*)$ が整数解 $(k,\ l)$ をもつとき，$m=6(8k+3l)$ と表せて，$k,\ l$ が整数であることより $8k+3l$ は整数であるから，m は 6 の倍数である．

逆に，m が 6 の倍数であるとき，$m=6M$ (M は整数) とおくことにより，$(*)$ は

$$8k+3l=M$$

と同値である．この方程式は，$(k,\ l)=(-M,\ 3M)$ という整数解をもち，これはもとの $(*)$ の整数解でもある．

よって，上の (1) で記した空欄の条件は必要十分条件である．

[証明おわり]

(3) $m=540$ のときの $(*)$ は，

$$8k+3l=90 \quad \cdots①$$

と同値である．

ここで，

$$8\cdot 0+3\cdot 30=90 \quad \cdots②$$

が成り立つから，① − ② より，

$$8k+3(l-30)=0$$

$$8k=3(30-l)$$

8 と 3 は互いに素であるから，$k,\ l$ が整数であれば

$$\begin{cases} k=3N, \\ 30-l=8N \end{cases} \quad (N\text{ は整数})$$

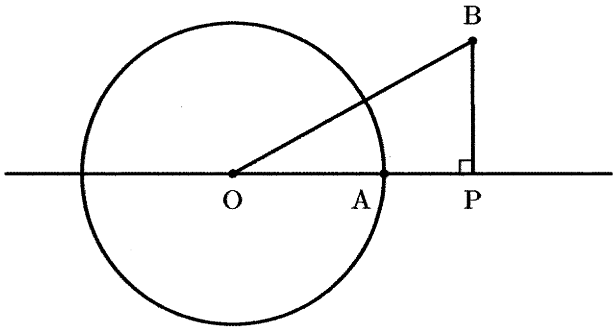
とおける．すなわち，

$$\begin{cases} k=3N, \\ l=30-8N \end{cases} \quad (N\text{ は整数})$$

さらに，$k,\ l$ が正の整数となるのは $N=1,\ 2,\ 3$ のときであるから，求めるものは，

$$\mathbf{(k,\ l)=(3,\ 22),\ (6,\ 14),\ (9,\ 6)} \quad \cdots[\text{答}]$$

$\boxed{2}$



(1) 与条件より，A$(x,\ y,\ z)$ について，

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad \cdots ①$$

P は直線 OA 上の点だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(kx,\ ky,\ kz) \ \ (k \text{ は実数})$$

と表せる．

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(kx-1,\ ky-1,\ kz-1)$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=x(kx-1)+y(ky-1)+z(kz-1)=0$$

$$k(x^2+y^2+z^2)=x+y+z$$

これと ① より，

$$k=x+y+z$$

である．よって，

$$\mathrm{P}\Big((x+y+z)x,\ (x+y+z)y,\ (x+y+z)z\Big)$$

となり，

$$\mathrm{OP}=\sqrt{(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)}=|x+y+z| \quad (① \text{ より})$$

また，

$$\mathrm{BP}=\sqrt{\Big\{(x+y+z)x-1\Big\}^2+\Big\{(x+y+z)y-1\Big\}^2+\Big\{(x+y+z)z-1\Big\}^2}$$

$$=\sqrt{(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)-2(x+y+z)(x+y+z)+3}$$

$$=\sqrt{(x+y+z)^2-2(x+y+z)^2+3} \quad (① \text{ より})$$

$$=\sqrt{3-(x+y+z)^2}$$

2 （続き）

三角形 OBP を OP を軸として一回転させてできる立体は，底面の円の半径が BP で高さが OP の直円錐であるから，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\mathrm{BP}^2\cdot\mathrm{OP}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}|x+y+z|\left\{3-(x+y+z)^2\right\}}\quad\cdots[答]$$

(2) ① のもとで $x+y+z=t$ とおくことにより，

$$V=\frac{\pi}{3}|t|(3-t^2)$$

$f(t)=|t|(3-t^2)$ と定めると，$t>0$ のとき

$$f(t)=-t^3+3t,\ \ f'(t)=3(1-t^2)$$

であるから，$t\geqq 0$ における $f(t)$ の増減は次のようになる．

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		+	0	−
$f(t)$	0	↗	2	↘

$f(t)$ は偶関数であることに注意すれば，$f(t)$ は $t=\pm1$ のときに最大値 2 をとる．
$t=1$ は $x+y+z=1$ のことであり，これは ① のもとで起こり得る．
$t=-1$ は $x+y+z=-1$ のことであり，これも ① のもとで起こり得る．
以上のことから，

$$V\text{ の最大値は }\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}\quad\cdots[答]$$

であり，そのときに x，y，z の満たす関係式は，

$$\boldsymbol{x+y+z=1}\ \text{ または }\ \boldsymbol{x+y+z=-1}\quad\cdots[答]$$

である．

$\boxed{3}$

(1)

$$C_1 \text{ の中心は } (\tan\theta,\ \tan\theta),$$

$$C_2 \text{ の中心は } (a\cos\theta-1,\ a\sin\theta+1)$$

であるから，

$$\begin{aligned}
L^2 &= (a\cos\theta-1-\tan\theta)^2+(a\sin\theta+1-\tan\theta)^2\\
&= a^2\cos^2\theta+1+\tan^2\theta-2a\cos\theta+2\tan\theta-2a\sin\theta\\
&\qquad +a^2\sin^2\theta+1+\tan^2\theta+2a\sin\theta-2\tan\theta-2a\sin\theta\tan\theta\\
&= a^2+2(1+\tan^2\theta)-2a\cos\theta(1+\tan^2\theta)\\
&= a^2+\frac{2}{\cos^2\theta}-\frac{2a}{\cos\theta}\\
&= \boldsymbol{2t^2-2at+a^2} \quad \left(t=\frac{1}{\cos\theta}\right) \quad \cdots[\text{答}]
\end{aligned}$$

(2) C_1 と C_2 がただ1つの共有点をもつのは，外接する場合と内接する場合である．

(外接する場合)

$$\begin{aligned}
L=3+1 &\iff L^2=16\\
&\iff 2t^2-2at+a^2-16=0 \quad \cdots①
\end{aligned}$$

(内接する場合)

$$\begin{aligned}
L=3-1 &\iff L^2=4\\
&\iff 2t^2-2at+a^2-4=0 \quad \cdots②
\end{aligned}$$

① または ② を満たす実数 $t\ (\neq 0)$ に対して，$\cos\theta=\dfrac{1}{t}$ によって θ が対応する．

ただし，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であることに注意して，1つの実数 t に対応する θ の個数は，

- $t>1$ のときは2個
- $t=1$ のときは1個
- $t<1$ のときは0個

したがって，① または ② を満たす t から決まる θ の個数が全部で5個となるのは，次のいずれかの場合である．

(ア) ① が $t>1$ に異なる2解をもつ．さらに ② は $t=1$ を解の1つにもち，もう1つの解を $t\leqq 1$ にもつ

(イ) ② が $t>1$ に異なる2解をもつ．さらに ① は $t=1$ を解の1つにもち，もう1つの解を $t\leqq 1$ にもつ

(ウ) ① が $t>1$ に解を1つだけもち，もう一つの解は $t=1$ である．さらに ② は $t>1$ と $t<1$ に解を1つずつもち，①，② の解は重複しない

$\boxed{3}$

(エ) ② が $t>1$ に解を 1 つだけもち，もう一つの解は $t=1$ である．さらに ① は $t>1$ と $t<1$ に解を 1 つずつもち，①, ② の解は重複しない

いずれの場合も ①, ② のいずれかは $t=1$ を解にもっていなければならないことになるので，それらの場合を検討する．

まず，① が $t=1$ を解にもつのは，

$$2-2a+a^2-16=0 \iff a^2-2a-14=0$$

のときであり，$a>0$ より $a=1+\sqrt{15}$ である．

このとき，① は

$$t^2-(1+\sqrt{15})t+\sqrt{15}=0$$

なので，2 つの解は $t=1,\ \sqrt{15}$ であり，よって ① から決まる θ は 3 個である．

一方，このときの ② は

$$t^2-(1+\sqrt{15})t+6+\sqrt{15}=0$$

となるが，これは

$$(\text{判別式})=(1+\sqrt{15})^2-4(6+\sqrt{15})=-2(4+\sqrt{15})<0$$

なので実数解をもたない．

したがって，① が $t=1$ を解にもつ場合は，①, ② から決まる θ の個数が全部で 5 個にはならず，不適当である．

次に，② が $t=1$ を解にもつのは，

$$2-2a+a^2-4=0 \iff a^2-2a-2=0$$

のときであり，$a>0$ より $a=1+\sqrt{3}$ である．

このとき，② は

$$t^2-(1+\sqrt{3})t+\sqrt{3}=0$$

なので，2 つの解は $t=1,\ \sqrt{3}$ であり，よって ② から決まる θ は 3 個である．

一方，このときの ① は

$$t^2-(1+\sqrt{3})t-6+\sqrt{3}=0$$

であり，これの左辺を $f(t)$ とおくと，

$$f(1)=-6<0$$

だから，$t>1$ と $t<1$ に解を 1 つずつもつ．よって，① から決まる θ は 2 個である．

さらに，① は $t=\sqrt{3}$ は解にもたないので，①, ② の解に重複はない．

したがって，①, ② から決まる θ の個数は全部で 5 個となり，条件に適する．

以上より，求める値は，

$$\boldsymbol{a=1+\sqrt{3}} \quad \cdots[\text{答}]$$

4

(1) $x^2+y^2=1$ と $y=-x^2+b$ を連立して，

$$x^2+(-x^2+b)^2=1$$

$$x^4-(2b-1)x^2+b^2-1=0 \quad \cdots ①$$

曲線 C と円 $x^2+y^2=1$ が異なる4個の交点をもつのは，① が異なる4つの実数解をもつときである．
$x^2=t$ とおいて，

$$t^2-(2b-1)t+b^2-1=0 \quad \cdots ①'$$

①$'$ が異なる2つの正の解をもてばよい．
そのためには，まず，

$$(\text{判別式})=(2b-1)^2-4(b^2-1)=5-4b>0$$

より，$b<\dfrac{5}{4}$

さらに，このときの ①$'$ の2解を $t=P,\ Q\ (Q<P)$ とおいて，

$$P+Q>0 \text{ かつ } PQ>0$$

であればよい．すなわち，

$$2b-1>0 \text{ かつ } b^2-1>0$$

共通範囲をとることにより，求める b の値の範囲は，

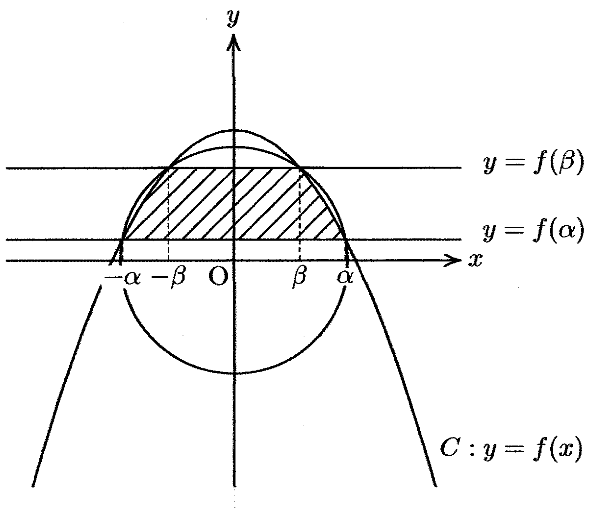
$$\boldsymbol{1<b<\frac{5}{4}} \quad \cdots[\text{答}]$$

[補足] このとき，次の (2) における $\alpha,\ \beta$ は，

$$\alpha=\sqrt{P},\ \beta=\sqrt{Q}$$

である．

(2)



$\boxed{4}$ （続き）

求める立体の体積は，

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} \pi x^2 \, dy \quad (\text{ただし，} y = f(x) = -x^2 + b)$$

$$= \pi \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} (b - y) \, dy = \pi \left[by - \frac{y^2}{2} \right]_{f(\alpha)}^{f(\beta)}$$

$$= \pi \left[bf(\beta) - \frac{\{f(\beta)\}^2}{2} - bf(\alpha) + \frac{\{f(\alpha)\}^2}{2} \right]$$

$$= \pi \left\{ b(-\beta^2 + b) - \frac{(-\beta^2 + b)^2}{2} - b(-\alpha^2 + b) + \frac{(-\alpha^2 + b)^2}{2} \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}(\alpha^4 - \beta^4) = \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2)$$

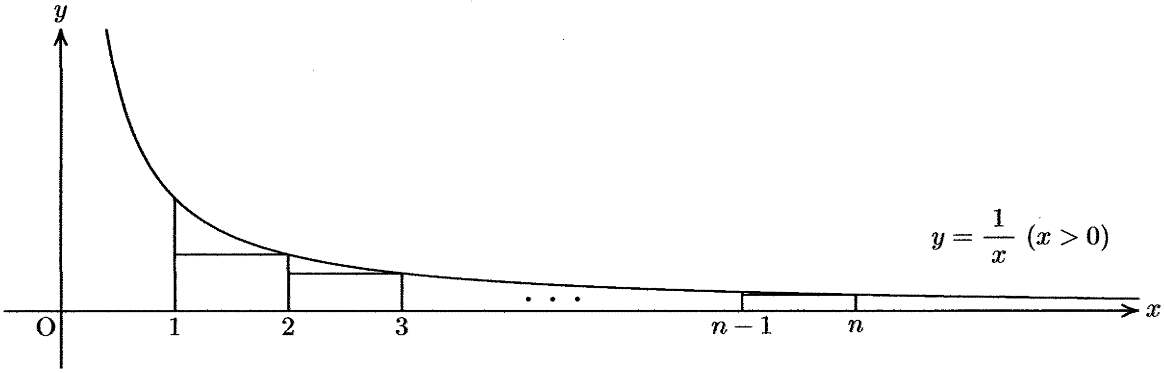
$$= \frac{\pi}{2}(P + Q)(P - Q)$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{2}(2b - 1)\sqrt{5 - 4b}} \quad \cdots [\text{答}]$$

[補足] $P = \dfrac{2b - 1 + \sqrt{5 - 4b}}{2}$，$Q = \dfrac{2b - 1 - \sqrt{5 - 4b}}{2}$

$\boxed{5}$

(1)



n が 2 以上の整数のとき，上図における面積の比較により，

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^n \frac{1}{x}\,dx=\Big[\log x\Big]_1^n=\log n$$

[証明おわり]

(2)

$$a_n=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

より，

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

これより，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

この式から，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k>\frac{1}{2}\quad\cdots①$$

また，$n \geqq 2$ のとき，(1) で示した不等式と組み合わせて，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\log n}{n}\quad\cdots②$$

$\boxed{5}$ （続き）

①，② より，

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\log n}{n}$$

$n \to \infty$ のとき，(右辺) $\to \frac{1}{2}$ であるから，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}$$

これが示すべきことであった．　[証明おわり]

(3)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+1)a_k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k a_k \\ &= \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{2n^2}\cdot\frac{n}{2}\left\{2+(n+1)\right\} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{n}\right) \\ &\to 1\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot 1 \quad (n\to\infty) \quad ((2)\text{より}) \end{aligned}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \mathbf{\frac{1}{4}} \quad \cdots[\text{答}]$$

$\boxed{6}$

(1) 求めるベクトルを $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$ とする．
大きさが1であるから，

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad \cdots ①$$

また，平面 α と垂直であることから，

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ かつ } \vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

である．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ -6,\ 3),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-6,\ 0,\ 3)$$

だから，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-2x-6y+3z=0 \quad \cdots ②$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-6x+3z=0 \quad \cdots ③$$

②, ③ より

$$z=2x,\quad y=\frac{2}{3}x$$

となる．これらを ① に代入して整理すれば，

$$x^2=\frac{9}{49} \text{ すなわち } x=\pm\frac{3}{7}$$

よって，求めるベクトルは，

$$\vec{n}=\left(\frac{3}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{6}{7}\right),\ \left(-\frac{3}{7},\ -\frac{2}{7},\ -\frac{6}{7}\right) \quad \cdots[\text{答}]$$

(2) 題意の球（の表面）を表す方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \quad (r>0)$$

である．
xy 平面に接するので，$c=r$ または $c=-r$
yz 平面に接し，$a\geqq 0$ であるので，$a=r$
zx 平面に接し，$b\geqq 0$ であるので，$b=r$
よって，点 P の座標は，

$$(r,\ r,\ r) \text{ または } (r,\ r,\ -r)$$

さらに，平面 α に接するので，その接点を H とおけば，

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=r\vec{n}=\left(\frac{3}{7}r,\ \frac{2}{7}r,\ \frac{6}{7}r\right),\ \left(-\frac{3}{7}r,\ -\frac{2}{7}r,\ -\frac{6}{7}r\right) \quad \cdots ④$$

また，H は平面 α 上の点であるので，

$\boxed{6}$（続き）

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + l\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$= (-2k,\ -6k,\ 3k) + (-6l,\ 0,\ 3l)$$
$$= (-2k-6l,\ -6k,\ 3k+3l)\quad (k,\ l \text{ は実数})$$

と表せて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} = (-2k-6l+6,\ -6k+6,\ 3k+3l+3)\quad \cdots⑤$$

(ア) $\mathrm{P}(r,\ r,\ r)$ である場合：

④ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PH}} = \left(\frac{10}{7}r,\ \frac{9}{7}r,\ \frac{13}{7}r\right),\ \left(\frac{4}{7}r,\ \frac{5}{7}r,\ \frac{1}{7}r\right)\quad \cdots⑥$$

⑤, ⑥ より，

$$\begin{cases} -2k-6l+6 = \dfrac{10}{7}r, \\ -6k+6 = \dfrac{9}{7}r, \\ 3k+3l+3 = \dfrac{13}{7}r \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} -2k-6l+6 = \dfrac{4}{7}r, \\ -6k+6 = \dfrac{5}{7}r, \\ 3k+3l+3 = \dfrac{1}{7}r \end{cases}$$

$$\therefore\ (k,\ l,\ r) = \left(\frac{3}{7},\ \frac{2}{9},\ \frac{8}{3}\right) \quad \text{または} \quad (k,\ l,\ r) = \left(-\frac{3}{7},\ 0,\ 12\right)$$

(イ) $\mathrm{P}(r,\ r,\ -r)$ である場合：

④ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PH}} = \left(\frac{10}{7}r,\ \frac{9}{7}r,\ -\frac{1}{7}r\right),\ \left(\frac{4}{7}r,\ \frac{5}{7}r,\ -\frac{13}{7}r\right)\quad \cdots⑦$$

⑤, ⑦ より，

$$\begin{cases} -2k-6l+6 = \dfrac{10}{7}r, \\ -6k+6 = \dfrac{9}{7}r, \\ 3k+3l+3 = -\dfrac{1}{7}r \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} -2k-6l+6 = \dfrac{4}{7}r, \\ -6k+6 = \dfrac{5}{7}r, \\ 3k+3l+3 = -\dfrac{13}{7}r \end{cases}$$

$$\therefore\ (k,\ l,\ r) = \left(-\frac{5}{7},\ -\frac{2}{3},\ 8\right) \quad \text{または} \quad (k,\ l,\ r) = \left(\frac{12}{7},\ 1,\ -6\right)$$

ただし，$r > 0$ なので，後者は不適当である．

$\boxed{6}$ （続き）

以上のことから，求める点 P と r の組は，

$$\mathbf{P}\left(\frac{8}{3},\ \frac{8}{3},\ \frac{8}{3}\right),\ r=\frac{8}{3}\quad \text{または}$$

$$\mathbf{P}(12,\ 12,\ 12),\ r=12\quad \text{または}\qquad\cdots[\text{答}]$$

$$\mathbf{P}(8,\ 8,\ -8),\ r=8$$