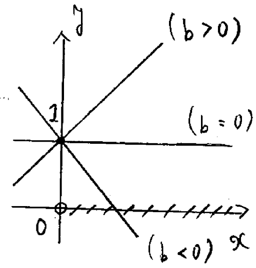
1

$f(x) = ax^2 + bx + 1$ とする。

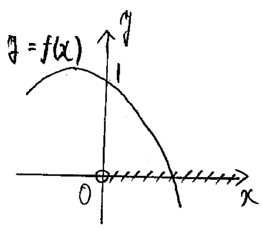
(i) $a = 0$ のとき，



$y = f(x) = bx + 1$ は 傾き b，y切片 $f(0) = 1\ (>0)$ の直線である。これが x軸の正の部分と共有点をもたないための条件は，$b \geqq 0$

(ii) $a \neq 0$ のとき，

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + 1$$



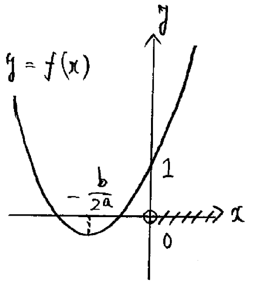
$f(0) = 1\ (>0)$ より、$a < 0$ ならば 曲線 $y = f(x)$ は x軸の正の部分と共有点をもつから，不適。

よって，$a > 0$ が必要であり，曲線 $y = f(x)$ が x軸の正の部分と共有点をもたないための条件は，次の①または②が成り立つことである。

① $-\frac{b}{2a} \leqq 0$

$a > 0$ より，

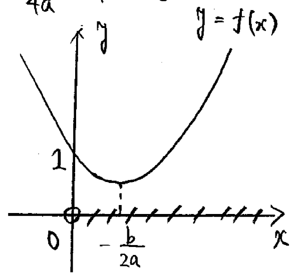
$b \geqq 0$



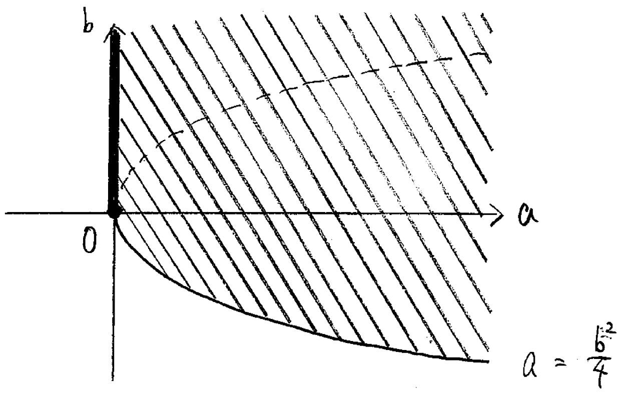
② $-\frac{b}{2a} > 0$ かつ $-\frac{b^2}{4a} + 1 > 0$

$a > 0$ より，

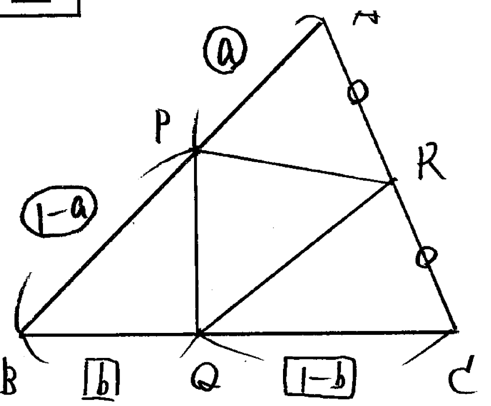
$b < 0$ かつ $a > \frac{b^2}{4}$



(i)，(ii) より，点 (a, b) の領域は下図の斜線部分である。境界は，$a = 0$ かつ $b \geqq 0$ の部分は含み，$a = \frac{b^2}{4}\ (b < 0)$ の部分は除く。



2



(1) △ABCと△APRで∠Aが共通なので

△APRの面積は

$S\times a\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}aS$ と表される。

同様にして

△BPQ、△CQRは

$(1-a)bS,\ \frac{1}{2}(1-b)S$ より

$$T=S-\frac{1}{2}aS-(1-a)bS-\frac{1}{2}(1-b)S$$

$$\therefore\ \frac{T}{S}=ab-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\text{[答]}$$

(2) $\frac{T}{S}=f(a,b)$ とする。まず b を固定して

$f(a,b)=\left(b-\frac{1}{2}\right)a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}$ として $b-\frac{1}{2}<0$ なので

$$f\left(\frac{1}{2},b\right)<f(a,b)<f(0,b)\quad\left(\because\ 0<a<\frac{1}{2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{1}{4}<f(a,b)<-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}$$

$0<b<\frac{1}{2}$ より $\frac{1}{4}<\frac{T}{S}=f(a,b)<\frac{1}{2}\ \cdots\cdots$ [答]

(3) (2)より $2<\frac{S}{T}<4$ なので整数であることより $\frac{S}{T}=3$

$$\frac{S}{T}=\frac{1}{ab-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{pq}-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2}}=\frac{2pq}{pq-p-q+2}$$

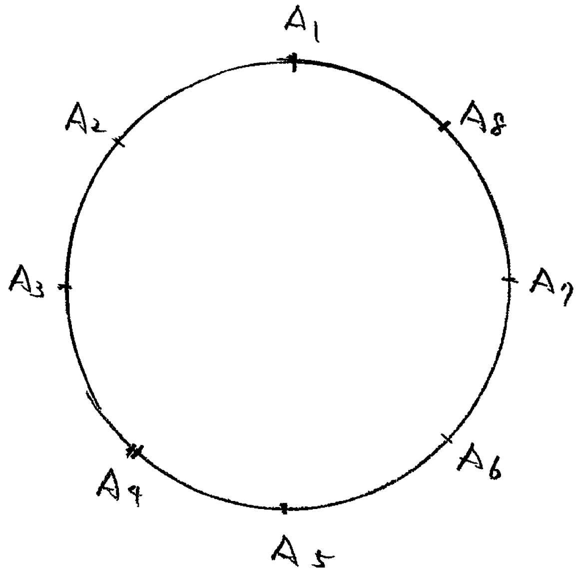
なので $2pq=3(pq-p-q+2)$

$\Longleftrightarrow (p-3)(q-3)=3$

$p-3\geqq0,\ q-3\geqq0$ より $(p-3,\ q-3)=(1,3)(3,1)$

$\therefore\ (p,q)=(4,6)(6,4)\ \cdots\cdots$ [答]

3



図のように円周を8等分した点をA_1、A_2……A_8とする。

(1) 直角三角形ができるので、1つの辺が円の直径と一致する。
直径は全部で4本あり、それぞれの直径に対して、残りの頂点の選び方が6通りあるので、

$4\times 6=24$コ ……[答]

(2) 二等辺三角形は、1つの頂点A_i $(i=1,2,\cdots,8)$に対して等辺の選び方が3通りあるので $8\times 3=24$コある。直角二等辺三角形が8コあるので
直角三角形または二等辺三角形は $24+24-8=40$コ
三角形は全部で ${}_8C_3=56$コより $56-40=16$コ ……[答]

(3) (1)のように考えると

(I) 対角線が直径であるとき

1つの直径に対して残りの2頂点は、直径によって分けられた2つの弧に1つずつ存在するので、 $3\times 3=9$通り よって $4\times 9=36$コ
但し、長方形は重複しているので ${}_4C_2=6$コを除いて $36-6=30$コ

(II) 対角線以外が直径のとき

1つの直径に対して残りの2頂点は、直径によって分けられた2つの弧の一方に存在するので ${}_3C_2\times 2=6$通り よって $4\times 6=24$コ

以上(I)(II)は排反なので $30+24=54$コ ……[答]

4

(1) ℓ の方程式を $y=x+k$ とする.

$x^3-2x = x+k \iff x^3-3x-k=0$ …①

は異なる 3つの実数解をもち, そのうちで最大のものが $x=a$ であるから,

$a^3-3a-k=0$ …② が成り立つ.

①－② より, $x^3-a^3-3(x-a)=0$.

$\therefore\ (x-a)(x^2+ax+a^2-3)=0$.

P と Q の x 座標を α, β とすれば, これらは $x^2+ax+a^2-3=0$ の 2解であることになるから, $\alpha+\beta=-a$.

よって, S の x 座標は $-\dfrac{a}{2}$.

また, S の y 座標は,

$-\dfrac{a}{2}+k = a^3-\dfrac{7}{2}a$ (② より).

以上より, $S\left(-\dfrac{a}{2},\ a^3-\dfrac{7}{2}a\right)$.

…[答]

(2) $X=-\dfrac{a}{2}$, $Y=a^3-\dfrac{7}{2}a$ より

a を消去することで, $Y=-8X^3+7X$.

…③

また, 曲線 $y=x^3-2x$ について

$y'=3x^2-2$ であることから, 接線の傾きが 1 となるのは $x=\pm 1$ のとき.

$x=1$ における接線は $y=x-2$ であり, このとき P の x 座標が -2, Q (= R) の x 座標が 1 となるので,

S の x 座標の上限は $\dfrac{-2+1}{2}=-\dfrac{1}{2}$ である.

$x=-1$ における接線は $y=x+2$ であり,

このとき P (= Q) の座標が -1 となるので,

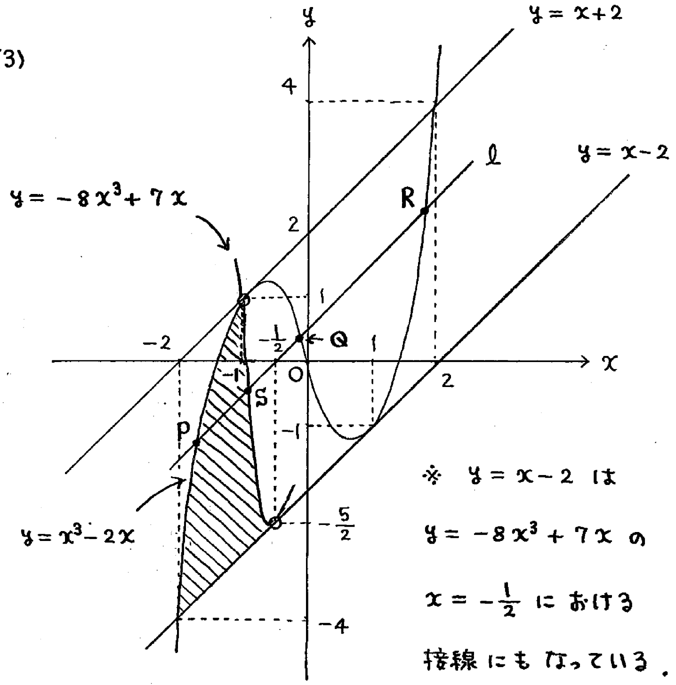
S の x 座標の下限は -1 である.

したがって, $-1<X<-\dfrac{1}{2}$. …④

③, ④ より, S の軌跡は,

曲線 $y=-8x^3+7x$ の $-1<x<-\dfrac{1}{2}$ の部分. …[答]

(3)



※ $y=x-2$ は $y=-8x^3+7x$ の $x=-\dfrac{1}{2}$ における接線にもなっている.

求める面積は,

$$\int_{-2}^{-1}\left\{x^3-2x-(x-2)\right\}dx + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left\{-8x^3+7x-(x-2)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{-1} + \left[-2x^4+3x^2+2x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}$$

$=\dfrac{27}{8}$. …[答]

5

O, A, B が異なる3点である条件は

$z \neq 0$ かつ $z^2 \neq 0$ かつ $z \neq z^2$

したがって, $z \neq 0$, $z \neq 1$ である。

(1) 3点 O, A, B が同一直線上となる条件は

$$\arg \frac{z^2 - 0}{z - 0} = (\text{整数}) \times \pi.$$

$$\arg z = (\text{整数}) \times \pi.$$

したがって, 求める条件は

z が実数であること。……(答)

(2) 3辺の長さは $|z|, |z^2|, |z^2 - z|$ である.

3点 O, A, B が二等辺三角形の頂点となるのは

(i) $|z| = |z^2|$,

(ii) $|z| = |z^2 - z|$,

(iii) $|z^2| = |z^2 - z|$

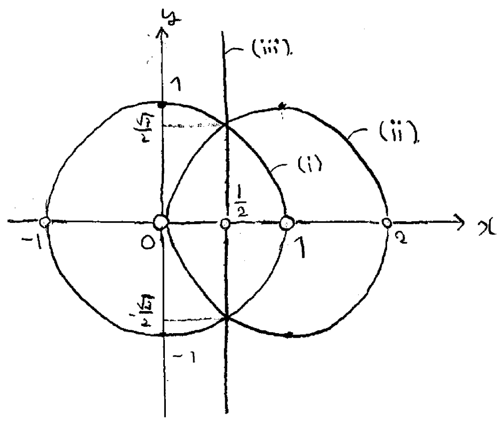
のいずれかのときである. $z \neq 0$ より

(i) は $|z| = 1$,

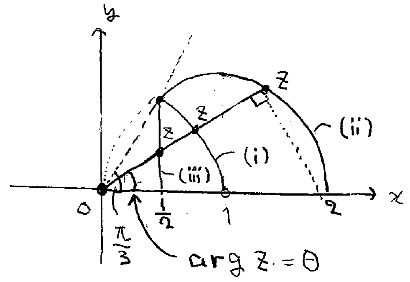
(ii) は $|z - 1| = 1$,

(iii) は $|z - 0| = |z - 1|$

となる. (1) に該当しないように考えて, 結果は次。



(3) $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ より, (2) の結果のうち次の部分について考える.



$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB$$

$$= \frac{1}{2} |z| |z^2| \sin \left(\arg \frac{z^2 - 0}{z - 0} \right)$$

$$= \frac{1}{2} |z|^3 \sin (\arg z).$$

上図の部分は $\arg z$ が等しく, $|z|$ が異なる3つの部分からなり, $|z|$ が最大なのは (ii) のときである. このとき, 図より, $|z| = 2\cos\theta$ であるから,

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} |z|^3 \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2} (2\cos\theta)^3 \sin\theta$$

$$= 4\cos^3\theta \sin\theta$$

ここで,

$f(\theta) = \cos^3\theta \sin\theta$ とおくと,

$$f'(\theta) = -3\cos^2\theta \sin^2\theta + \cos^4\theta$$

$$= \cos^4\theta (1 - 3\tan^2\theta)$$

$$= \cos^4\theta (1 + \sqrt{3}\tan\theta)(1 - \sqrt{3}\tan\theta)$$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ における増減は次。

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
$f'(\theta)$		+	0	−	
$f(\theta)$		↗		↘	

最大値は $\triangle OAB = 4f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ ……(答)

このとき,

$$z = 2\cos\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i. \quad \text{……(答)}$$

6

(1) $$F_n(a)=1+a+\cdots+\frac{a^n}{n!}+\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

とおくと,

$$F_{n+1}(a)-F_n(a)=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}+\int_0^a\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x\,dx-\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx$$

$$=\cancel{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}+\cancel{\left[\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x\right]_0^a}-\cancel{\int_0^a-\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx}-\cancel{\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx}$$

$$=0 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

および

$$F_1(a)=1+a+\int_0^a(a-x)e^x\,dx$$

$$=1+a+\left[(a-x)e^x\right]_0^a-\int_0^a-e^x\,dx=1+a-ae^0+e^a-1=e^a$$

から,

$$e^a=1+a+\cdots+\frac{a^n}{n!}+\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

[証明おわり]

(2) $0\leqq x\leqq a$ で $0\leqq a-x$ ゆえ $\dfrac{(a-x)^n}{n!}e^0\leqq\dfrac{(a-x)^n}{n!}e^x\leqq\dfrac{(a-x)^n}{n!}e^a$ が成り立つので, 積分して

$$\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}dx\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq e^a\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}dx$$

$$\therefore\ \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq e^a\cdot\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \quad (n=1,2,\cdots)$$

[証明おわり]

(3) (1)(2)で $a=1$ として, $n=1,2,\cdots$ に対して

$$\frac{1}{(n+1)!}\underset{(2)}{\leqq}\int_0^1\frac{(1-x)^n}{n!}dx\underset{(1)}{=}e-\left(1+1+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\underset{(2)}{\leqq}\frac{e}{(n+1)!}\ \cdots ㊍$$

が成り立つ。$n!$ は n とともに増加して, $6!=720$, $7!=5040$ より, $\left|e-\left(1+1+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right|<10^{-3}$ であるために $n+1\geqq 7$ が必要で ($\because$ ㊍)

$n+1=7$ のとき ㊍は, $2<e<3$ より,

$$\frac{1}{5040}\leqq\left|e-\left(1+1+\cdots+\frac{1}{6!}\right)\right|\leqq\frac{e}{5040}<\frac{3}{5040}<10^{-3}$$

となって, 十分でもある。

求めるべき n の最小値は　6 …… [答]