第 1 問

$C: y=ax^3-2x$ と原点を中心とする半径 1 の円 $x^2+y^2=1$ の共有点の個数が 6 個であることは，

$$y=ax^3-2x \text{ かつ } x^2+y^2=1 \qquad \cdots\cdots①$$

を満たす異なる実数 x, y の組 (x,y) がちょうど 6 個存在することと同値である．

$$① \iff y=ax^3-2x \text{ かつ } x^2+(ax^3-2x)^2=1$$
$$\iff y=ax^3-2x \text{ かつ } a^2x^6-4ax^4+5x^2-1=0.$$

ここで

$$a^2x^6-4ax^4+5x^2-1=0 \qquad \cdots\cdots②$$

を満たす 1 つの実数 x の値に対して $y=ax^3-2x$ によって実数 y の値がただ 1 つ対応するから，条件は②を満たす異なる実数 x がちょうど 6 個存在することと同値である．

②は $x=0$ を解にもたない．よって，$x^2=t$ とおくと $t>0$ としてよい．このもとで②は

$$a^2t^3-4at^2+5t-1=0 \qquad \cdots\cdots③$$

となり，③を満たす 1 つの正の数 t に対して $x=\pm\sqrt{t}$ の 2 つが対応するから，条件は③を満たす異なる正の数 t が 3 個存在することと同値である．

以上より，③の左辺を $f(t)$ とおくと，

tu 平面上の曲線 $u=f(t)$ が t 軸の正の部分と 3 つの共有点をもつ　$\cdots\cdots④$

ための a の条件を求めればよい．

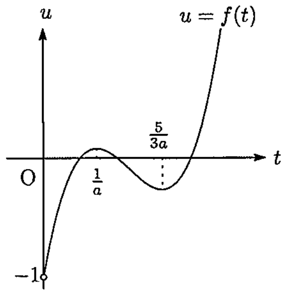
$$f'(t)=3a^2t^2-8at+5=(at-1)(3at-5)$$

より，$a>0$ を考慮すると $t>0$ における $f(t)$ の増減は次の通りである．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	$\frac{5}{3a}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	(-1)	$\nearrow$	$\frac{2}{a}-1$	$\searrow$	$\frac{50}{27a}-1$	$\nearrow$

よって，$u=f(t)$ の概形を考察することにより，条件を満たす a の範囲は，

$$④ \iff \frac{50}{27a}-1<0<\frac{2}{a}-1 \iff \frac{50}{27}<a<2. \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

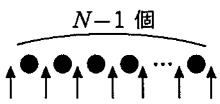


第 2 問

S に属する要素を○，属さない要素を●で表すことにする．

(1)

1	2	3	4	…	$2N$
○	●				



$\boxed{\text{この}}$部分には，$\begin{cases} \text{○}\ N-1\text{個} \\ \text{●}\ N-1\text{個} \end{cases}$ を隣り合わないように並べればよく，その総数は，● $N-1$ 個を先に並べて，その両端と隙間，計 N ヶ所から $N-1$ ヶ所を選んで○を 1 個ずつ入れる方法の総数に等しい．よって，求める場合の数は，${}_{N}\mathrm{C}_{N-1}=N$ (通り)　　… (答)

(2)【解答 I】連続する整数の最大個数で場合分けを行う．

$N\geqq 5$ より，$N-2\geqq 3$ であるから，連続する $N-2$ 個以上の○と残り 2 個以下の○の間に区別が生ずるので，（ア）～（ウ）の場合分けには重複がないことに注意する．

（ア）ちょうど N 個連続するとき，○の番号の組は，$(1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ の 1 通り

（イ）ちょうど $N-1$ 個連続するとき，

連続する数	残り 1 個	場合の数
$1\sim N-1$	$N+1\sim 2N$	N 通り
$3\sim N+1$	1	1 通り
$4\sim N+2$	1	1 通り
…	…	…
$N+2\sim 2N$	1	1 通り

（1 が要素に含まれるので，2 から始まることはない．以下同様．）

よって，$N+1\cdot N=2N$ (通り)

（ウ）ちょうど $N-2$ 個連続するとき，

連続する数	残り 2 個	場合の数
$1\sim N-2$	$N\sim 2N$ から 2 個	${}_{N+1}\mathrm{C}_2$ 通り
$3\sim N$	1 と，$N+2\sim 2N$ から 1 個	$N-1$ 通り
$4\sim N+1$	1 と，2，$N+3\sim 2N$ から 1 個	$N-1$ 通り
…	…	…
$N+2\sim 2N-1$	1 と，$2\sim N$ から 1 個	$N-1$ 通り
$N+3\sim 2N$	1 と，$2\sim N+1$ から 1 個	N 通り

よって，${}_{N+1}\mathrm{C}_2+N(N-1)+N=\dfrac{1}{2}N(3N+1)$ (通り)

以上より，求める場合の数は，

$$1+2N+\frac{1}{2}N(3N+1)=\frac{1}{2}(N+1)(3N+2)\ (\text{通り})$$　　… (答)

© 河合塾　2021 年

第 2 問（つづき）

(2)【解答２】連続する $N-2$ 個がどこから始まるかで場合分けを行う．

$N \geqq 5$ より，$N-2 \geqq 3$ であるから，以下の場合分けには重複がないことは前記と同様である．

連続する $N-2$ 個	残り	場合の数
$1\sim N-2$	$N-1\sim 2N$ から２個	${}_{N+2}\mathrm{C}_2$ 通り
$3\sim N$	１と，$N+1\sim 2N$ から１個	N 通り
$4\sim N+1$	１と，2，$N+2\sim 2N$ から１個	N 通り
$5\sim N+2$	１と，2，3，$N+3\sim 2N$ から１個	N 通り
…	…	…
$N+3\sim 2N$	１と，$2\sim N+1$ から１個	N 通り

以上より，求める場合の数は，

$${}_{N+2}\mathrm{C}_2 + N(N+1) = \frac{1}{2}(N+1)(3N+2)\ \text{（通り）}$$

…（答）

© 河合塾　2021 年

第 3 問

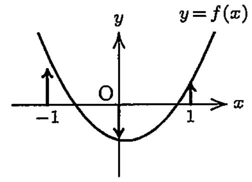
$$C : y = x^2 + ax + b, \quad \cdots ①$$
$$K : y = -x^2. \qquad \cdots ②$$

(1) ①, ②から，y を消去すると，

$$x^2 + ax + b = -x^2 \quad より， \quad 2x^2 + ax + b = 0. \quad \cdots ③$$

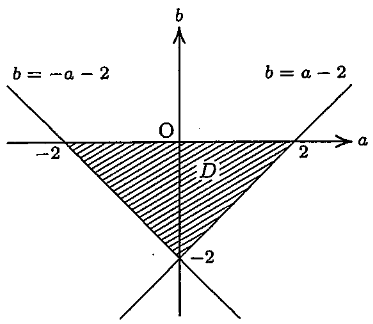
C と K が 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標が $-1 < x < 0$ を満たし，他方の共有点の x 座標が $0 < x < 1$ を満たすのは，x の方程式③が $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$ のそれぞれの区間に 1 解ずつを持つときである．

③の左辺を $f(x)$ とおくと，



$$\begin{cases} f(-1) = 2 - a + b > 0, \\ f(0) = b < 0, \\ f(1) = 2 + a + b > 0 \end{cases} \quad より， \quad \begin{cases} b > a - 2, \\ b < 0, \\ b > -a - 2. \end{cases} \quad \cdots ④$$

この④を満たす領域 D を ab 平面上に図示すると，次の図の斜線部分（境界を除く）．



…(答)

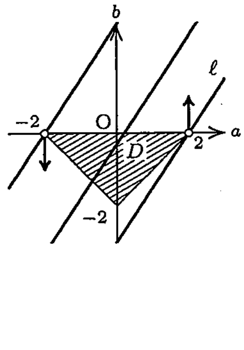
(2) ④を満たす (a, b) に対する放物線 $C : y = x^2 + ax + b$ の通りうる範囲は，①かつ④を満たす実数 a, b が存在するような (x, y) の集合である．

①より，

$$\ell : b = -xa - x^2 + y.$$

これは，ab 平面上では，傾き $-x$，b 切片 $-x^2 + y$ の直線を表すから，直線 ℓ と領域 D が共有点を持つような (x, y) の条件を求めればよい．

(ア) $-x \geqq 1$，すなわち，$x \leqq -1$ のとき．



$$\begin{cases} a = 2 \text{ のとき}, b > 0, \\ a = -2 \text{ のとき}, b < 0 \end{cases} \quad より， \quad \begin{cases} -2x - x^2 + y > 0, \\ 2x - x^2 + y < 0. \end{cases}$$

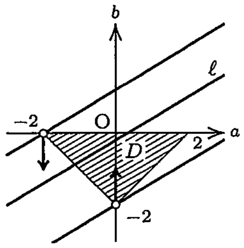
よって，

$$x^2 + 2x < y < x^2 - 2x.$$

© 河合塾　2021 年

第 3 問 (つづき 1)

(イ) $0 \leqq -x < 1$，すなわち，$-1 < x \leqq 0$ のとき．

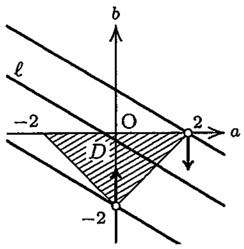


$$\begin{cases} a=0 \text{ のとき}, b > -2, \\ a=-2 \text{ のとき}, b<0 \end{cases} \text{ より}, \quad \begin{cases} -x^2+y > -2, \\ 2x-x^2+y<0. \end{cases}$$

よって，

$$x^2-2<y<x^2-2x.$$

(ウ) $-1 \leqq -x < 0$，すなわち，$0 < x \leqq 1$ のとき．

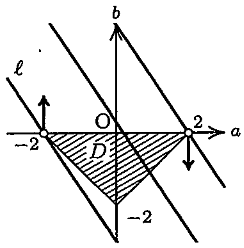


$$\begin{cases} a=0 \text{ のとき}, b > -2, \\ a=2 \text{ のとき}, b<0 \end{cases} \text{ より}, \quad \begin{cases} -x^2+y > -2, \\ -2x-x^2+y<0. \end{cases}$$

よって，

$$x^2-2<y<x^2+2x.$$

(エ) $-x < -1$，すなわち，$x>1$ のとき．

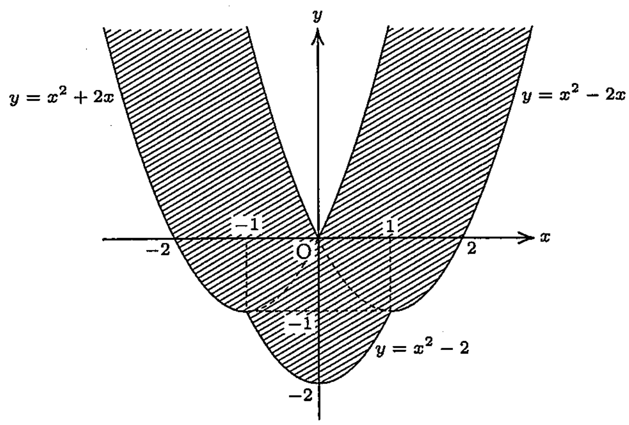


$$\begin{cases} a=-2 \text{ のとき}, b > 0, \\ a=2 \text{ のとき}, b<0 \end{cases} \text{ より}, \quad \begin{cases} 2x-x^2+y > 0, \\ -2x-x^2+y<0. \end{cases}$$

よって，

$$x^2-2x<y<x^2+2x.$$

以上から，C の通過領域を図示すると，次の図の斜線部分（境界を除く）．



…(答)

© 河合塾　2021 年

第 3 問 (つづき 2)

【D と ℓ が共有点を持つ条件を求める部分の別解】

ab 平面上で D と ℓ が共有点を持つのは，直線 ℓ が，D を表す三角形のいずれかの辺 (ただし両端を除く) と 1 点で交わるときである．

$$\ell : xa+b+x^2-y=0$$

であるから，$g(a,\ b)=xa+b+x^2-y$ としたときに，3 点 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(0,\ -2)$ のいずれか 2 点が $g(a,\ b)=0$ に関して反対側の領域にあればよい．

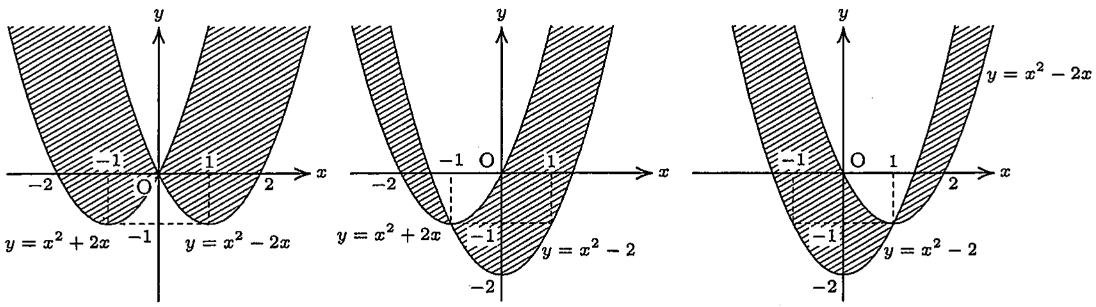
よって，

$$g(-2,\ 0)g(2,\ 0)<0 \quad \text{または} \quad g(2,\ 0)g(0,\ -2)<0 \quad \text{または} \quad g(-2,\ 0)g(0,\ -2)<0$$

より，

$$\begin{cases} (-2x+x^2-y)(2x+x^2-y)<0 \\ \text{または} \\ (2x+x^2-y)(-2+x^2-y)<0 \\ \text{または} \\ (-2x+x^2-y)(-2+x^2-y)<0. \end{cases}$$

よって，これらを順に図示すると，次の図の斜線部分（境界を除く）である．



したがって，これらの和集合を考えると，前ページの図を得る．

〔D と ℓ が共有点を持つ条件を求める部分の別解終り〕

© 河合塾　2021 年

第4問

以下すべて4を法とする合同式で考える．(mod 4) を略記する．

(1)　K は正の奇数であるから，$K \equiv 1$ または $K \equiv -1$ のいずれかが成り立つ．
よって，K, L それぞれを4で割った余りが等しいとき，

$$K \equiv L \equiv \pm 1$$

である．

これより，複号同順で

$$0 = KA - LB \equiv K(A-B) \equiv \pm(A-B)$$

となり，$A-B$ は4の倍数であるから，A, B それぞれを4で割った余りは等しい．　（証明終り）

(2)　$a > b$ より，

$$
\begin{aligned}
{}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1} &= \frac{\overbrace{(4a+1)4a(4a-1)(4a-2)\cdots(4a-4b+5)(4a-4b+4)(4a-4b+3)(4a-4b+2)(4a-4b+1)}^{4b+1\text{ 個}}}{\underbrace{(4b+1)4b(4b-1)(4b-2)\cdots 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{4b+1\text{ 個}}}\\
&= \frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{4a}{4b}\cdot\frac{4a-1}{4b-1}\cdot\frac{4a-2}{4b-2}\cdots\frac{4a-4b+5}{5}\cdot\frac{4a-4b+4}{4}\cdot\frac{4a-4b+3}{3}\cdot\frac{4a-4b+2}{2}\cdot\frac{4a-4b+1}{1}\\
&= \frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{4a-1}{4b-1}\cdot\frac{2a-1}{2b-1}\cdots\frac{4a-4b+5}{5}\cdot\frac{a-b+1}{1}\cdot\frac{4a-4b+3}{3}\cdot\frac{2a-2b+1}{1}\cdot\frac{4a-4b+1}{1}\\
&= \frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{4a-1}{4b-1}\cdot\frac{2a-1}{2b-1}\cdots\frac{4a-4b+5}{5}\cdot\frac{4a-4b+3}{3}\cdot\frac{2a-2b+1}{1}\cdot\frac{4a-4b+1}{1}\\
&\qquad\qquad\times\frac{a}{b}\cdot\frac{a-1}{b-1}\cdots\frac{a-b+2}{2}\cdot\frac{a-b+1}{1}\\
&= \frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{4a-1}{4b-1}\cdot\frac{2a-1}{2b-1}\cdots\frac{4a-4b+5}{5}\cdot\frac{4a-4b+3}{3}\cdot\frac{2a-2b+1}{1}\cdot\frac{4a-4b+1}{1}\times{}_a\mathrm{C}_b \qquad \cdots\cdots①
\end{aligned}
$$

であるから，

$$K = \underbrace{(4b+1)(4b-1)(2b-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1\cdot 1}_{3b+1\text{ 個}}$$

$$L = \underbrace{(4a+1)(4a-1)(2a-1)\cdots(4a-4b+5)(4a-4b+3)(2a-2b+1)\cdot(4a-4b+1)}_{3b+1\text{ 個}}$$

とおくと，K, L は正の奇数であり，①より，

$$A = \frac{L}{K}\times B$$

すなわち $KA = LB$ となる．　（証明終り）

© 河合塾　2021 年

第4問（つづき）

(3)　正の整数 a, b に対して $4a \equiv 4b$ であり，さらに $a-b$ が2で割り切れるとき，$2a-2b=2(a-b)$ は4で割り切れるので，$2a \equiv 2b$ も成り立つ．

よって，$3b+1$ 個の合同式

$$\begin{aligned} 4a+1 &\equiv 4b+1\,, \\ 4a-1 &\equiv 4b-1\,, \\ 2a-1 &\equiv 2b-1\,, \\ &\vdots \\ 4a-4b+5 &\equiv 5\,, \\ 4a-4b+3 &\equiv 3\,, \\ 2a-2b+1 &\equiv 1\,, \\ 4a-4b+1 &\equiv 1 \end{aligned}$$

が成り立ち，これらを辺々掛けると，(2) で定めた K, L について

$$L \equiv K$$

が成り立つ．

したがって，K, L それぞれを4で割った余りは等しく，さらに $KA=LB$ であるから，(1) の結果より，$A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を4で割った余りは $B={}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を4で割った余りと等しい．　（証明終り）

(4)　$4a+1=2021$, $4b+1=37$ すなわち $a=505$, $b=9$ とすると，$a-b=496$ は2で割り切れるから，(3) の結果が使えて，

$${}_{2021}\mathrm{C}_{37} \equiv {}_{505}\mathrm{C}_{9} \qquad \cdots\cdots②$$

である．

次に，$4a+1=505$, $4b+1=9$ すなわち $a=126$, $b=2$ とすると，$a-b=124$ は2で割り切れるから，(3) の結果が使えて，

$${}_{505}\mathrm{C}_{9} \equiv {}_{126}\mathrm{C}_{2} \qquad \cdots\cdots③$$

である．

②，③より，${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を4で割った余りは ${}_{126}\mathrm{C}_{2}$ を4で割った余りと等しく，

$${}_{126}\mathrm{C}_{2} = \frac{126\cdot125}{2} = 63\cdot125 \equiv 3\cdot1 = 3$$

より，

$$3 \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

© 河合塾　2021年