第１問

(1)　$y=x^2+ax+b$ と $y=-x^2$ を連立して y を消去すると，

$$x^2+ax+b=-x^2 \quad \text{すなわち} \quad 2x^2+ax+b=0 \qquad \cdots(*)$$

となる．$(*)$ の実数解が放物線 C と放物線 $y=-x^2$ の共有点の x 座標である．したがって，$(*)$ が $-1<x<0$ と $0<x<1$ の範囲に１つずつ解をもつ条件を求めればよい．それは，$(*)$ の左辺を $f(x)$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と，$-1<x<0$ と $0<x<1$ の範囲に１つずつ共有点をもつ条件である．よって，

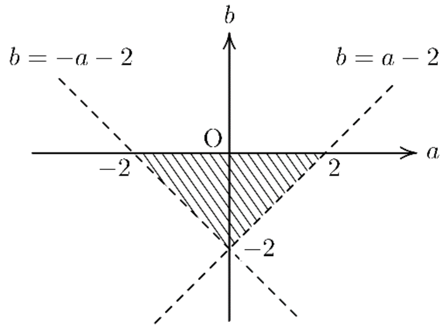
$$f(-1)>0 \quad \text{かつ} \quad f(0)<0 \quad \text{かつ} \quad f(1)>0$$

すなわち，

$$b>a-2 \quad \text{かつ} \quad b<0 \quad \text{かつ} \quad b>-a-2 \qquad \cdots(\natural)$$

である．

以上より，点 (a,b) のとりうる範囲を座標平面上に図示すると，図の斜線部分のようになる．ただし，境界は含まない．



(2)　(1)で求めた点 (a,b) の範囲を D とする．

放物線 C の通りうる範囲に，点 (X,Y) が属するための条件は，

$$Y=X^2+aX+b \text{ かつ } (\natural) \text{ を満たす実数 } a,\ b \text{ の組 } (a,b) \text{ が存在すること}$$

である．それは，

$$ab \text{ 平面上で } D \text{ と直線 } b=-Xa+Y-X^2 \text{ が共有点をもつこと}$$

となる．D が b 軸に関して対称であり，また，２直線 $b=-Xa+Y-X^2$ と $b=-(-X)a+Y-(-X)^2$ も b 軸に関して対称である．したがって，(X,Y) のとき共有点をもつことと，$(-X,Y)$ のときに共有点をもつことは同値なので，以下，$-X \geqq 0$ のときを調べる．$g(a)=-Xa+Y-X^2$ とする．

(i)　$0 \leqq -X \leqq 1$ すなわち $-1 \leqq X \leqq 0$ のとき，共有点をもつ条件は，

$$g(0)>-2 \ \text{かつ} \ g(-2)<0 \quad \text{つまり} \quad X^2-2<Y<X^2-2X$$

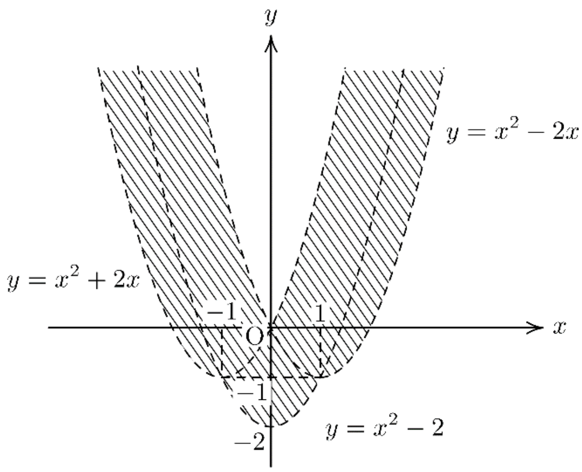
である．

(ii)　$-X \geqq 1$ すなわち $X \leqq -1$ のとき，共有点をもつ条件は，

$$g(2)>0 \ \text{かつ} \ g(-2)<0 \quad \text{つまり} \quad X^2+2X<Y<X^2-2X$$

である．

以上(i),(ii)と y 軸に関する対称性より，放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示すると，図の斜線部分のようになる．ただし，境界は含まない．



第１問（つづき）

(参考)　$h(a,b)=X^2+aX+b-Y$, A$(2,0)$, B$(-2,0)$, C$(0,-2)$ とする．(2)は，直線 $h(a,b)=0$ が線分 AB, BC, CA (いずれも両端は除く) のいずれかとただ一つの共有点をもつ条件と同じである．例えば，直線 $h(a,b)=0$ と線分 AB の場合を考えると，2 点 A, B が直線 $h(a,b)=0$ に関して反対側にあることなので，求める条件は，

$$h(2,0)h(-2,0)<0 \quad \text{または} \quad h(-2,0)h(0,-2)<0 \quad \text{または} \quad h(0,-2)h(2,0)<0$$

から，

$$\left(X^2+2X-Y\right)\left(X^2-2X-Y\right)<0$$

または

$$\left(X^2-2X-Y\right)\left(X^2-2-Y\right)<0$$

または

$$\left(X^2-2-Y\right)\left(X^2+2X-Y\right)<0$$

としてよい．

第２問

(1)

$$\begin{cases} f(0)=\alpha \\ f(1)=\beta \\ f(i)=\gamma \end{cases} \iff \begin{cases} c=\alpha \\ a+b+c=\beta \\ -a+bi+c=\gamma \end{cases} \iff \begin{cases} c=\alpha \\ a+b=\beta-\alpha \\ -a+bi=\gamma-\alpha \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c=\alpha \\ (1+i)b=\beta+\gamma-2\alpha \\ (1-i)a=\beta-\alpha+(\gamma-\alpha)i \end{cases}$$ ．よって，$$\begin{cases} a=-i\alpha+\dfrac{1+i}{2}\beta+\dfrac{-1+i}{2}\gamma \\ b=(-1+i)\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma \\ c=\alpha \end{cases}$$ ．　…（答）

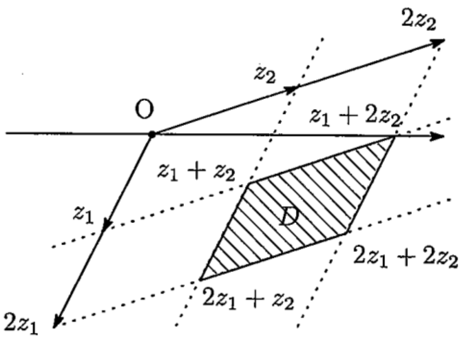
(2)　$f(2)=4a+2b+c$ である．$f(2)=w$ とおき，(1) の結果を代入すると，

$$w=\{-4i\alpha+(2+2i)\beta+(-2+2i)\gamma\}+\{(-2+2i)\alpha+(1-i)\beta+(1-i)\gamma\}+\alpha$$
$$=\alpha(-1-2i)+\beta(3+i)+\gamma(-1+i) \qquad \cdots ①$$

ここで，α,β,γ は $1\leqq\alpha\leqq2$，$1\leqq\beta\leqq2$，$1\leqq\gamma\leqq2$ を満たす実数である．　…②

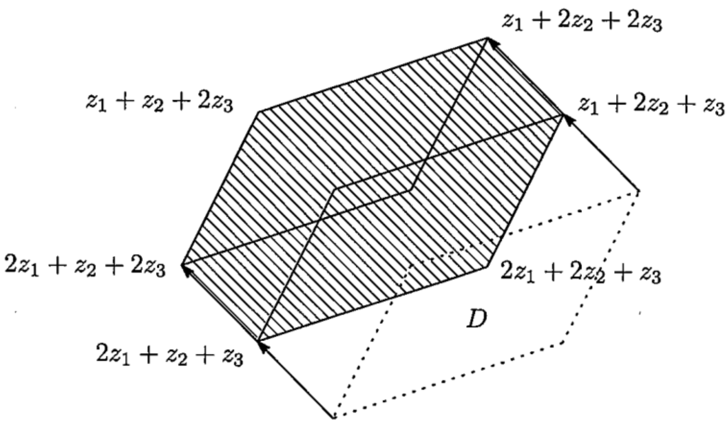
簡単のため $\begin{cases} -1-2i=z_1 \\ 3+i=z_2 \\ -1+i=z_3 \end{cases}$ とおく．

$1\leqq\alpha\leqq2$ かつ $1\leqq\beta\leqq2$ のとき，$\alpha z_1+\beta z_2$ が動く範囲は，下図斜線部である．



この平行四辺形の周及び内部を D とおく．

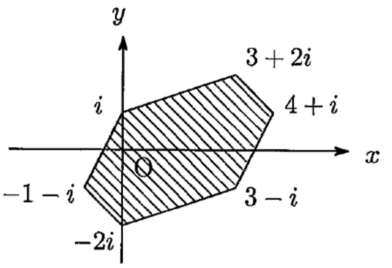
D の各点に γz_3 を足すと，D が γz_3 だけ平行移動する．γ が 1 から 2 まで動くとき，D は z_3 から $2z_3$ まで平行移動するので，D の通過範囲は下図になる．これが w，つまり $f(2)$ の存在範囲である．



第２問（つづき）

$2z_1+2z_2+z_3=3-i,\quad z_1+2z_2+z_3=4+i,\quad z_1+2z_2+2z_3=3+2i,$
$z_1+z_2+2z_3=i,\quad 2z_1+z_2+2z_3=-1-i,\quad 2z_1+z_2+z_3=-2i$

であるから, 答えは, これら６点を頂点とする六角形の周及び内部である.
図示すると, 下図斜線部となる. 境界を含む.



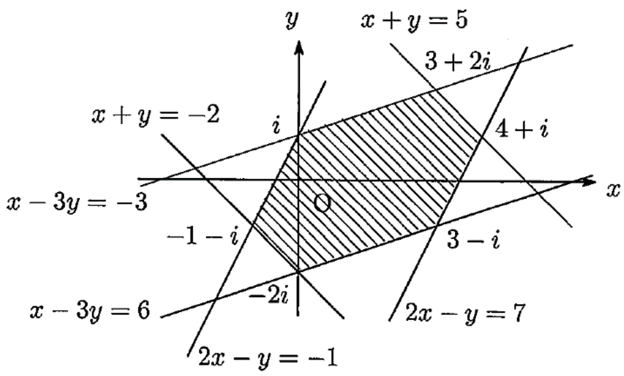
…(答)

補足　① で $w=x+yi$ (x,y は実数) とおくと, $\begin{cases} x=-\alpha+3\beta-\gamma \\ y=-2\alpha+\beta+\gamma \end{cases}$ となる. これを α,β の方程式とみて, α,β について解くと, $\begin{cases} \alpha-3\beta=-x-\gamma \\ 2\alpha-\beta=-y+\gamma \end{cases}$ から $\begin{cases} \alpha=\dfrac{x-3y+4\gamma}{5} \\ \beta=\dfrac{2x-y+3\gamma}{5} \end{cases}$. これと ② を満たす α,β,γ が存在する x,y の範囲が求めるものである.

まず, α,β が存在する条件は $\begin{cases} 1\leqq\dfrac{x-3y+4\gamma}{5}\leqq 2 \\ 1\leqq\dfrac{2x-y+3\gamma}{5}\leqq 2 \end{cases}$. よって, $\begin{cases} \dfrac{5-x+3y}{4}\leqq\gamma\leqq\dfrac{10-x+3y}{4} \\ \dfrac{5-2x+y}{3}\leqq\gamma\leqq\dfrac{10-2x+y}{3} \end{cases}$.

$1\leqq\gamma\leqq 2$ を満たす γ が存在する条件は, $\begin{cases} 1\leqq\dfrac{10-x+3y}{4} \text{ かつ } \dfrac{5-x+3y}{4}\leqq 2 \\ 1\leqq\dfrac{10-2x+y}{3} \text{ かつ } \dfrac{5-2x+y}{3}\leqq 2 \\ \dfrac{5-x+3y}{4}\leqq\dfrac{10-2x+y}{3} \\ \dfrac{5-2x+y}{3}\leqq\dfrac{10-x+3y}{4} \end{cases}$.

すなわち, $\begin{cases} x-3y\leqq 6 \text{ かつ } -3\leqq x-3y \\ 2x-y\leqq 7 \text{ かつ } -1\leqq 2x-y \\ x+y\leqq 5 \\ -2\leqq x+y \end{cases}$. これらを満たす点 (x,y) の全体が求めるものとなる.
答えは, 下図斜線部となる. 境界を含む.



第３問

$f(1)=\dfrac{1}{4}$ である．また，

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+3)-x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$$

より，$f'(1)=\dfrac{1}{8}$ である．

(1) $g(x)=f'(1)(x-1)+f(1)=\dfrac{x+1}{8}$ である．

次に方程式 $g(x)=f(x)$ を解くと，

$$\begin{aligned}&\frac{x+1}{8}=\frac{x}{x^2+3},\\&(x+1)(x^2+3)=8x,\\&x^3+x^2-5x+3=0,\\&(x-1)^2(x+3)=0.\end{aligned}$$

ゆえに，C と l の共有点で A と異なるものは $(-3,\ g(-3))$ のただ１つである．

(証明終り)

その共有点の x 座標は -3 である．　…(答)

(2) $I=\displaystyle\int_{-3}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx$ とおくと，

$$I=\int_{-3}^{1}\{f(x)\}^2\,dx-2\int_{-3}^{1}f(x)g(x)\,dx+\int_{-3}^{1}\{g(x)\}^2\,dx$$

である．

さて，$I_1=\displaystyle\int_{-3}^{1}\{g(x)\}^2\,dx$，$I_2=\displaystyle\int_{-3}^{1}f(x)g(x)\,dx$，$I_3=\displaystyle\int_{-3}^{1}\{f(x)\}^2\,dx$ とおくと，

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{1}{8^2}\int_{-3}^{1}(x+1)^2\,dx\\&=\frac{1}{8^2}\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-3}^{1}\\&=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

である．

第３問（つづき１）

また，I_2，I_3 においては，$x=\sqrt{3}\tan\theta \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}=\sqrt{3}(\tan^2\theta+1)$ であり，x と θ の対応は次のようになる．

x	$-3 \to 1$
θ	$-\frac{\pi}{3} \to \frac{\pi}{6}$

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_{-3}^{1} \frac{x^2}{(x^2+3)^2}\,dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\tan^2\theta}{9(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\sqrt{3}(\tan^2\theta+1)\,d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{4}, \\
I_2 &= \int_{-3}^{1} \frac{x}{x^2+3}\cdot\frac{x+1}{8}\,dx \\
&= \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\tan^2\theta+\sqrt{3}\tan\theta}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\sqrt{3}(\tan^2\theta+1)\,d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (\sqrt{3}\tan^2\theta+\tan\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left\{\sqrt{3}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)+\tan\theta\right\}\,d\theta \\
&= \frac{1}{8}\left[\sqrt{3}(\tan\theta-\theta)-\log|\cos\theta|\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{16}\pi-\frac{1}{16}\log 3.
\end{aligned}
$$

以上より，

$$
\begin{aligned}
I &= I_1-2I_2+I_3 \\
&= \frac{5}{24}\sqrt{3}\pi+\frac{1}{8}\log 3-\frac{7}{6} \qquad \cdots(答)
\end{aligned}
$$

を得る．

第３問（つづき２）

((2) の別解)
まず，被積分関数を整理する.

$$
\begin{aligned}
\{f(x)-g(x)\}^2 &= \frac{x^2}{(x^2+3)^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x(x+1)}{x^2+3} + \frac{(x+1)^2}{64} \\
&= \frac{(x^2+3)-3}{(x^2+3)^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2+3+x-3}{x^2+3} + \frac{(x+1)^2}{64} \\
&= \frac{1}{x^2+3} - \frac{3}{(x^2+3)^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x^2+3} \\
&\qquad\qquad + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2+3} + \frac{(x+1)^2}{64} \\
&= \frac{(x+1)^2}{64} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x^2+3} + \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{x^2+3} - \frac{3}{(x^2+3)^2}.
\end{aligned}
$$

次に

$$
\begin{aligned}
\int_{-3}^{1}(x+1)^2\,dx &= \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-3}^{1} \\
&= \frac{16}{3}, \\
\int_{-3}^{1}\frac{1}{4}\,dx &= 1, \\
\int_{-3}^{1}\frac{x}{x^2+3}\,dx &= \left[\frac{1}{2}\log\left|x^2+3\right|\right]_{-3}^{1} \\
&= -\frac{1}{2}\log 3
\end{aligned}
$$

である.
さらに，$x=\sqrt{3}\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，
$\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}=\sqrt{3}(\tan^2\theta+1)$ であり，x と θ の対応は次のようになる.

x	-3	$\to$	1
θ	$-\frac{\pi}{3}$	$\to$	$\frac{\pi}{6}$

第３問（つづき３）

したがって，

$$
\begin{aligned}
\int_{-3}^{1} \frac{1}{x^2+3}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\sqrt{3}(\tan^2\theta+1)\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3}\,d\theta \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}\pi,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-3}^{1} \frac{1}{(x^2+3)^2}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{9(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\sqrt{3}(\tan^2\theta+1)\,d\theta \\
&= \frac{\sqrt{3}}{9}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\,d\theta \\
&= \frac{\sqrt{3}}{9}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{\sqrt{3}}{18}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{\sqrt{3}}{18}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{36}\pi+\frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

を得る．

以上より，求める積分の値 I は

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{64}\cdot\frac{16}{3}-1-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\log 3\right)+\frac{7}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\pi-3\left(\frac{\sqrt{3}}{36}\pi+\frac{1}{12}\right) \\
&= \frac{5\sqrt{3}}{24}\pi+\frac{1}{8}\log 3-\frac{7}{6} \qquad \cdots\text{(答)}
\end{aligned}
$$

である．

((2) の別解終り)

第４問

(1)
$$K(A-B)=KA-KB=LB-KB=(L-K)B$$
であり，K,L を 4 で割った余りが等しいとき，$L-K$ が 4 の倍数であるから，$K(A-B)$ も 4 の倍数である．

これと K が奇数であることより，$A-B$ が 4 の倍数となり，A,B を 4 で割った余りは一致する．

（証明終り）

(2)

$${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}=\frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{4a}{4b}\cdot\frac{4a-1}{4b-1}\cdot\frac{4a-2}{4b-2}\cdot\frac{4a-3}{4b-3}\cdot\frac{4a-4}{4b-4}\cdot\cdots\cdot\frac{4a-4b+1}{1}$$

であるから，

$$x_k=\frac{4a-k}{4b-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,4b-1)$$

とおくと，

$${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}=\frac{4a+1}{4b+1}x_0x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_{4b-1}$$

となる．

ここで，

$$\begin{aligned}x_0x_4x_8\cdots x_{4b-4}&=\frac{4a}{4b}\cdot\frac{4a-4}{4b-4}\cdot\frac{4a-8}{4b-8}\cdot\cdots\cdot\frac{4a-4b+4}{4}\\&=\frac{a}{b}\cdot\frac{a-1}{b-1}\cdot\frac{a-2}{b-2}\cdot\cdots\cdot\frac{a-b+1}{1}\\&={}_a\mathrm{C}_b.\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}x_2x_6x_{10}\cdots x_{4b-2}&=\frac{4a-2}{4b-2}\cdot\frac{4a-6}{4b-6}\cdot\frac{4a-10}{4b-10}\cdot\cdots\cdot\frac{4a-4b+2}{2}\\&=\frac{(2a-1)(2a-3)(2a-5)\cdot\cdots\cdot(2a-2b+1)}{(2b-1)(2b-3)(2b-5)\cdot\cdots\cdot1},\qquad\cdots①\end{aligned}$$

$$x_1x_5x_9\cdots x_{4b-3}=\frac{(4a-1)(4a-5)(4a-9)\cdot\cdots\cdot(4a-4b+3)}{(4b-1)(4b-5)(4b-9)\cdot\cdots\cdot3},\qquad\cdots②$$

$$x_3x_7x_{11}\cdots x_{4b-1}=\frac{(4a-3)(4a-7)(4a-11)\cdot\cdots\cdot(4a-4b+1)}{(4b-3)(4b-7)(4b-11)\cdot\cdots\cdot1}\qquad\cdots③$$

であり，これらの分母・分子とも正の奇数である．

よって，$\dfrac{4a+1}{4b+1}$，①，②，③ の分母の積を K，分子の積を L とおくと，K，L は正の奇数で，

第４問（つづき）

$$ {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1} = \frac{L}{K}\,{}_{a}\mathrm{C}_{b} $$

となるので，$KA = LB$ を満たす正の奇数 K, L が存在する．（証明終り）

(3) $\dfrac{4a+1}{4b+1}$ の分母・分子は奇数で，分母と分子の差は４の倍数であるから，分母・分子を４で割った余りは一致する．

k を４で割った余りが１または３のとき，x_k の分母・分子はともに奇数であり，分母と分子の差は，

$$ (4b-k)-(4a-k)=4(b-a) $$

より，４の倍数であるから，分母・分子を４で割った余りは一致する．

また，k を４で割った余りが２のとき，$k=4k'+2$ $(k'=0,1,2,\cdots,b-1)$ と表され，このとき，

$$ x_k = \frac{4a-4k'-2}{4b-4k'-2} = \frac{2a-2k'-1}{2b-2k'-1} $$

より，この分母・分子はともに奇数である．

さらに，分母と分子の差は，

$$ (2b-2k'-1)-(2a-2k'-1)=2(b-a) $$

であり，$a-b$ が２の倍数であることよりこれは４の倍数であるから，分母・分子を４で割った余りは一致する．

よって，$\dfrac{4a+1}{4b+1}$，②，③および $\dfrac{2a-2k'-1}{2b-2k'-1}$ $(k'=0,1,2,\cdots,b-1)$ の分母の積を K，分子のの積を L とおくと，K, L は４で割った余りの等しい奇数であり，$K\,{}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1} = L\,{}_{a}\mathrm{C}_{b}$ となるので，(1)から，${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を４で割った余りは等しい．（証明終り）

(4)

$$ {}_{2021}\mathrm{C}_{37} = {}_{4\times505+1}\mathrm{C}_{4\times9+1},\quad {}_{505}\mathrm{C}_{9} = {}_{4\times126+1}\mathrm{C}_{4\times2+1} $$

であるから，(3)より，${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$，${}_{505}\mathrm{C}_{9}$，${}_{126}\mathrm{C}_{2}$ を４で割った余りは一致し，

$$ {}_{126}\mathrm{C}_{2} = 63\times125 = (4\times15+3)\times(4\times31+1) $$

より，求める余りは，

$$ 3. $$

…(答)

第５問

(1) $f(\theta)$ の定義より

$$f(\theta) = \mathrm{AP}^2 = (\theta + \sin\theta + \alpha)^2 + (\cos\theta + 3)^2$$

であるから，

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 2(\theta + \sin\theta + \alpha)(1 + \cos\theta) + 2(\cos\theta + 3)(-\sin\theta) \\ &= -4\sin\theta + 2(\theta + \alpha)\cos\theta + 2(\theta + \alpha), \\ f''(\theta) &= -2(\theta + \alpha)\sin\theta - 2\cos\theta + 2, \\ f'''(\theta) &= -2(\theta + \alpha)\cos\theta \end{aligned}$$

である．$\alpha > 0$ に注意して $f''(\theta)$ の増減を調べると次のようになる：

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'''(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f''(\theta)$	0	$\searrow$	$2-\pi-2\alpha$	$\nearrow$	4

$2-\pi-2\alpha < 0$ であるから，$f''(\beta) = 0$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ を満たす β がただ一つ存在し，$0 < \theta < \beta$ では $f''(\theta) < 0$，$\beta < \theta < \pi$ では $f''(\theta) > 0$ が成り立つ．

これより，$f'(\theta)$ の増減は次のようになる：

θ	0	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$f''(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f'(\theta)$	4α	$\searrow$	$f'(\beta)$	$\nearrow$	0

これより $f'(\beta) < f'(\pi) = 0$ であり，$f'(0) = 4\alpha > 0$ に注意すると，$f'(\gamma) = 0$, $0 < \gamma < \beta$ なる γ がただ一つ存在することが分かる．これが示すべきことであった．

（証明終り）

(2) (1) より，$f(\theta)$ の増減は次のようになる：

θ	0	$\cdots$	γ	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	0
$f(\theta)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(\gamma)$	$\searrow$	$f(\pi)$

よって，$f(\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ は最大値 $f(\gamma)$ をとり，そのときの θ は $\theta = \gamma$ のみであるから，求める条件は $\gamma < \frac{\pi}{2}$ と同値である．$f'(\theta)$ の増減表と $f'(\gamma) = 0$ より $0 < \theta < \gamma$ のとき $f'(\theta) > 0$，$\gamma < \theta < \pi$ のとき $f'(\theta) < 0$ であるから，$\gamma < \frac{\pi}{2}$ は $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ すなわち $\pi - 4 + 2\alpha < 0$ と同値である．

したがって，求める α の範囲は $0 < \alpha < 2 - \frac{\pi}{2}$ である．　$\cdots$（答）

第５問（つづき）

【注】　(1) では，$0<\theta<\pi$ の下で

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -4\sin\theta + 2(\theta+\alpha)\cos\theta + 2(\theta+\alpha) \\ &= -4\sin\theta + 2(\theta+\alpha)(1+\cos\theta) \\ &= 2(1+\cos\theta)\left\{\alpha - \left(\frac{2\sin\theta}{1+\cos\theta} - \theta\right)\right\} \end{aligned}$$

という変形を利用してもよい．$g(\theta) = \dfrac{2\sin\theta}{1+\cos\theta} - \theta$ とおくと，

$$g'(\theta) = \frac{2\cos\theta(1+\cos\theta) - 2\sin\theta(-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^2} - 1 = \frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^2} - 1 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

を得る．よって，$0<\theta<\pi$ において $g'(\theta)>0$ であるから，$g(\theta)$ はこの区間で単調増加である．また，

$$\lim_{\theta\to+0} g(\theta) = \frac{2\cdot 0}{1+1} - 0 = 0,$$

$$\lim_{\theta\to\pi-0} g(\theta) = \lim_{\theta\to\pi-0}\left(\frac{2\sin\theta(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} - \theta\right) = \lim_{\theta\to\pi-0}\left(\frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\theta} - \theta\right) = \infty$$

であることから，$\alpha>0$ に注意すると，$g(\theta)=\alpha$ を満たす $0<\theta<\pi$ がただ一つ存在することが分かる．

これと，$0<\theta<\pi$ において $1+\cos\theta>0$ であることより，

$$f'(\theta) = 0 \iff \alpha = g(\theta)$$

であり，$f'(\theta)=0$ を満たす $0<\theta<\pi$ がただ一つ存在することが示される．

(2) も，$g(\theta)=\alpha, 0<\theta<\pi$ を満たす唯一の θ を γ とおけば，$g(\theta)$ の単調性より $0<\theta<\gamma$ のとき $f'(\theta)>0$，$\gamma<\theta<\pi$ のとき $f'(\theta)<0$ が言えるので，前掲の解答と同様に α の範囲を導くことができる．

第６問

$$x^4+bx+c=\left(x^2+px+q\right)\left(x^2-px+r\right) \qquad \cdots(*)$$

(1)

$$((*)\text{ の右辺})=x^4+\left(q+r-p^2\right)x^2+p(-q+r)x+qr$$

であるから，$(*)$ の両辺の対応する係数を比較して，

$$q+r-p^2=0 \ \cdots① \quad \text{かつ} \quad p(-q+r)=b \ \cdots② \quad \text{かつ} \quad qr=c \ \cdots③$$

である．$p \neq 0$ のとき，①と②を q,r について解いて，

$$q=\frac{1}{2}\left(p^2-\frac{b}{p}\right),\quad r=\frac{1}{2}\left(p^2+\frac{b}{p}\right) \qquad \cdots(\text{答})$$

である．

(2)　$p \neq 0$ とする．

$$b=\left(a^2+1\right)(a+2),\quad c=-\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a^2+1\right)$$

のとき，(1)の結果を③に用いて q,r を消去すると，

$$\frac{1}{2}\left(p^2-\frac{b}{p}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(p^2+\frac{b}{p}\right)=c$$

$$\left(p^3-b\right)\left(p^3+b\right)=4cp^2$$

$$p^6-4cp^2-b^2=0$$

$$p^6+4\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a^2+1\right)p^2-\left(a^2+1\right)^2(a+2)^2=0$$

$$\left\{p^2-\left(a^2+1\right)\right\}\left\{p^4+\left(a^2+1\right)p^2+\left(a^2+1\right)(a+2)^2\right\}=0$$

となる．したがって，有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で，

$$\left\{p^2-\left(a^2+1\right)\right\}\left\{p^4+f(a)p^2+g(a)\right\}=0$$

を満たすものの１組は，

$$f(t)=t^2+1,\quad g(t)=\left(t^2+1\right)(t+2)^2 \qquad \cdots(\text{答})$$

である．

(3)　一般に，有理数を係数とする x の４次式，

$$x^4+bx+c$$

が，有理数を係数とする２次式の積に因数分解できるとき，

$$x^4+bx+c=\left(x^2+Px+Q\right)\left(x^2+P'x+R\right)$$

と表される．ただし，x^2 の係数は適当な有理数を掛けることによりどちらも１としてよい．x^3 の係数を比較することにより $P+P'=0$ となる．

したがって，整数 a に対して，

$$b=\left(a^2+1\right)(a+2)\cdots④,\qquad c=-\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a^2+1\right)\cdots⑤$$

とするとき，$(*)$ を満たす有理数 p,q,r が存在するような a を求めればよい．

第６問（つづき）

$p=0$ のとき，②より $b=0$ であるから④，⑤より $a=-2,\ c=\dfrac{25}{4}$ となる．このとき，①，③より，

$$q+r=0 \quad \text{かつ} \quad qr=\frac{25}{4}$$

であるから，q と r は x の２次方程式

$$x^2+\frac{25}{4}=0$$

の２解である．q と r が有理数とならないので不適である．

$p\neq 0$ のとき，$p^4+\left(a^2+1\right)p^2+\left(a^2+1\right)(a+2)^2>0$ であるから(2)より，

$$p^2=a^2+1 \quad \text{すなわち} \quad p=\pm\sqrt{a^2+1}$$

である．p が有理数のとき，(1)の結果より q と r も有理数となるので，$p,\ q,\ r$ が有理数となるための必要十分条件は p が有理数となることである．

このとき，

$$\sqrt{a^2+1}=\frac{l}{k} \quad (k \text{ と } l \text{ は互いに素な正の整数})$$

と表せて，

$$a^2+1=\frac{l^2}{k^2}$$

となる．$\dfrac{l^2}{k^2}$ が整数であることが必要であるが，k と l は互いに素な正の整数なので $k=1$ に限り，

$$a^2+1=l^2 \quad \text{すなわち} \quad (l-a)(l+a)=1$$

となる．これを満たす (l,a) は $(l,a)=(1,0)$ に限る．

以上から，求める整数 a の値は，

$$a=0 \qquad \cdots(\text{答})$$

である．

(参考)　$a=0$ のとき，実際，

$$x^4+2x-\frac{3}{4}=\left(x^2+x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-x+\frac{3}{2}\right)$$

と２次式の積に因数分解される．