静岡大学　（前期）1 / 3

教育学部(学校教育教員養成課程-音楽・美術・保体除く)、理学部（生物科学科・地球科学科)、農学部、地域創造学環（選抜方法Ａ）　Ｍ１

1

(1) $f(x)=0$, $g(x)=0$ の判別式をそれぞれ D_1, D_2 とおく。

$a>0$ なので,

$$D_1 = (-1)^2-4\cdot1\cdot(-a) = 4a+1 > 0.$$

$$D_2 = (-a)^2-4\cdot1\cdot(-1) = a^2+4 > 0.$$

よって, $f(x)=0$, $g(x)=0$ は共に2つの異なる実数解を持つ. (証明終り)

(2) $f(x)=0$ の2解を α, β $(\alpha<\beta)$ とおく. 解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 1 & \cdots ① \\ \alpha\beta = -a & \cdots ② \end{cases}$$

また, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$ より,

$$\begin{cases} \alpha^2 = \alpha + a & \cdots ③ \\ \beta^2 = \beta + a & \cdots ④ \end{cases}$$

このとき,

$$g(\alpha)g(\beta) = (\alpha^2 - a\alpha - 1)(\beta^2 - a\beta - 1)$$

③, ④ を代入すると,

$$g(\alpha)g(\beta) = \{-(a-1)\alpha+(a-1)\}\{-(a-1)\beta+(a-1)\}$$
$$= (a-1)^2(\alpha-1)(\beta-1)$$
$$= (a-1)^2\{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\}$$

①, ② を代入すると,

$$g(\alpha)g(\beta) = (a-1)^2(-a-1+1)$$
$$= -a(a-1)^2.$$

$a>0$, $a\neq1$ であるから,

$$g(\alpha)g(\beta) < 0,$$

よって, $g(x)=0$ の2つの解のうち1つだけが $f(x)=0$ の2つの解の間にある.

(証明終り)

(3) $f(x)=0$ を解くと,

$$x = \frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$$

よって, $\alpha<\beta$ より,

$$\beta-\alpha = \sqrt{4a+1}$$

このとき,

$$S(a) = \int_\alpha^\beta \{-f(x)\}\,dx$$
$$= -\int_\alpha^\beta (x^2-x-a)\,dx$$
$$= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$
$$= \frac{1}{6}(4a+1)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots ⑤$$

$g(x)=0$ を解くと,

$$x = \frac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}.$$

$g(x)=0$ の2解を γ, δ $(\gamma<\delta)$ とおくと.

$$\delta-\gamma = \sqrt{a^2+4}.$$

このとき,

$$T(a) = \int_\gamma^\delta \{-g(x)\}\,dx$$
$$= -\int_\gamma^\delta (x^2-ax-1)\,dx$$
$$= -\int_\gamma^\delta (x-\gamma)(x-\delta)\,dx$$
$$= \frac{1}{6}(\delta-\gamma)^3$$
$$= \frac{1}{6}(a^2+4)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots ⑥$$

⑤, ⑥ より, $S(a)=T(a)$ となるのは, $\sqrt{4a+1}$, $\sqrt{a^2+4}$ は実数であるから.

$$4a+1 = a^2+4$$
$$a^2-4a+3 = 0$$
$$(a-1)(a-3) = 0$$

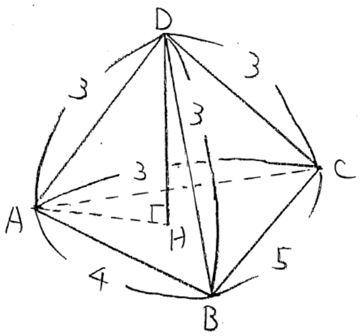
$a>0$, $a\neq1$ より, $a=3$ …(答)

このとき,

$$S(3) = \frac{13\sqrt{13}}{6} \quad \cdots (答)$$

教育学部(学校教育教員養成課程-音楽・美術・保体除く)、理学部（生物科学科・地球科学科)、農学部、地域創造学環（選抜方法Ａ）　Ｍ１

2



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos\angle BAD$

$= 4\times 3\times\dfrac{4^2+3^2-3^2}{2\times 4\times 3}$

$= 8$ …(答)

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos\angle CAD$

$= 3\times 3\times\dfrac{3^2+3^2-3^2}{2\times 3\times 3}$

$= \dfrac{9}{2}$ …(答)

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC$

$= 4\times 3\times\dfrac{4^2+3^2-5^2}{2\times 4\times 3}$

$= 0$

点Hは、平面ABC上より、実数s, tを用いて

$\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ …①

と表すことができる。

$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AD}$

$= s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AB}$ より、

$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$(s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$16s - 8 = 0$

$s = \dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AC}$ より、

$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$(s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$9t - \dfrac{9}{2} = 0$

$t = \dfrac{1}{2}$

よって、①より、

$\overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ …(答)

(3) $|\overrightarrow{AH}|^2 = \left|\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\right|^2$

$= \dfrac{1}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2)$

$= \dfrac{1}{4}(4^2+3^2)$

$= \dfrac{25}{4}$

三角形AHDで三平方の定理より、

$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2}$

$= \sqrt{3^2 - \dfrac{25}{4}}$

$= \dfrac{\sqrt{11}}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, $|\overrightarrow{AB}| \neq 0$, $|\overrightarrow{AC}| \neq 0$ であるから、

$\angle BAC = 90^\circ$

よって、三角形ABCの面積Sは、

$S = AB\times AC\times\dfrac{1}{2}$

$= 4\times 3\times\dfrac{1}{2}$

$= 6$

したがって、四面体ABCDの体積Vは、

$V = S\times DH\times\dfrac{1}{3}$

$= 6\times\dfrac{\sqrt{11}}{2}\times\dfrac{1}{3}$

$= \sqrt{11}$ …(答)

教育学部(学校教育教員養成課程-音楽・美術・保体除く)、理学部（生物科学科・地球科学科)、農学部、地域創造学環（選抜方法Ａ）　Ｍ１

3

(1) すべての自然数 n に対して, 等式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \cdots ①$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す.

(i) $n=1$ のとき.

$$(\text{左辺}) = 1^2 = 1,$$

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 1$$

であるから①は成り立つ.

(ii) $n = l\ (\geqq 1)$ のとき.

$$\sum_{k=1}^{l} k^2 = \frac{1}{6}l(l+1)(2l+1)$$

が成り立つと仮定する. このとき,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{l} k^2 + (l+1)^2\\ &= \frac{1}{6}l(l+1)(2l+1) + (l+1)^2\\ &= \frac{1}{6}(l+1)\{l(2l+1)+6(l+1)\}\\ &= \frac{1}{6}(l+1)(l+2)(2l+3)\end{aligned}$$

であるから, $n=l+1$ のときも①は成り立つ.

(i), (ii) より, すべての自然数 n に対して, ①が成り立つことが示された. (証明終り)

(2) 条件より,

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \{1, 2, \cdots, n\}$$

であるから,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \sum_{k=1}^{n}\left[(a_k-k)^2 + \{a_k-(n-k+1)\}^2\right]\\ &= 2\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} a_k\\ &\qquad + \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2\\ &= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k\\ &\qquad + \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2\\ &= 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k\\ &= 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \frac{1}{3}n(n+1)\{2(2n+1)-3(n+1)\}\\ &= \frac{1}{3}(n-1)n(n+1). \quad \cdots (\text{答})\end{aligned}$$

(3) (2) の結果より,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-k)^2 = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\{a_k-(n-k+1)\}^2$$

であり, $\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$ は k によらない定数であるから, $\sum_{k=1}^{n}(a_k-k)^2$ が最大となるのは,

$$\sum_{k=1}^{n}\{a_k-(n-k+1)\}^2 \text{ が最小} \quad \cdots ②$$

となるときである.

ここで, $k=1, 2, \cdots, n$ に対して,

$$\{a_k-(n-k+1)\}^2 \geqq 0$$

であるから, ②となるのは,

$$a_k-(n-k+1) = 0 \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

すなわち

$$a_k = n-k+1 \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

となるときである.

よって,

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (n, n-1, \cdots, 1). \quad \cdots (\text{答})$$