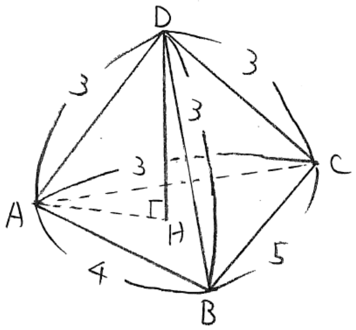
静岡大学　（前期）1 / 4

情報学部（情報科学科）、理学部（物理学科・化学科・創造理学コース）、工学部　M２

1



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos\angle BAD$
$=4\times3\times\frac{4^2+3^2-3^2}{2\times4\times3}$
$=8$ …(答)

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos\angle CAD$
$=3\times3\times\frac{3^2+3^2-3^2}{2\times3\times3}$
$=\frac{9}{2}$ …(答)

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC$
$=4\times3\times\frac{4^2+3^2-5^2}{2\times4\times3}$
$=0$

点Hは、平面ABC上より、実数s,tを用いて
$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ …①
と表すことができる.
$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AD}$
$=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AB}$より、
$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
$(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AB}=0$
$16s-8=0$
$s=\frac{1}{2}$
$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AC}$より、
$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$
$(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AC}=0$
$9t-\frac{9}{2}=0$
$t=\frac{1}{2}$
よって、①より、
$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ …(答)

(3) $|\overrightarrow{AH}|^2=\left|\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\right|^2$
$=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2)$
$=\frac{1}{4}(4^2+3^2)$
$=\frac{25}{4}$

三角形AHDで三平方の定理より、
$DH=\sqrt{AD^2-AH^2}$
$=\sqrt{3^2-\frac{25}{4}}$
$=\frac{\sqrt{11}}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, $|\overrightarrow{AB}|\neq0$, $|\overrightarrow{AC}|\neq0$であるから、
$\angle BAC=90°$
よって、三角形ABCの面積Sは、
$S=AB\times AC\times\frac{1}{2}$
$=4\times3\times\frac{1}{2}$
$=6$
したがって、四面体ABCDの体積Vは、
$V=S\times DH\times\frac{1}{3}$
$=6\times\frac{\sqrt{11}}{2}\times\frac{1}{3}$
$=\sqrt{11}$ …(答)

2

(1)　すべての自然数 n に対して，等式

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\quad\cdots\text{①}$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i)　$n=1$ のとき．

$$(\text{左辺})=1^2=1,$$
$$(\text{右辺})=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3=1$$

であるから①は成り立つ．

(ii)　$n=l\ (\geqq 1)$ のとき．

$$\sum_{k=1}^{l}k^2=\frac{1}{6}l(l+1)(2l+1)$$

が成り立つと仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l+1}k^2&=\sum_{k=1}^{l}k^2+(l+1)^2\\&=\frac{1}{6}l(l+1)(2l+1)+(l+1)^2\\&=\frac{1}{6}(l+1)\{l(2l+1)+6(l+1)\}\\&=\frac{1}{6}(l+1)(l+2)(2l+3)\end{aligned}$$

であるから，$n=l+1$ のときも①は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して，①が成り立つことが示された．（証明終り）

(2)　条件より，

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=\{1,2,\cdots,n\}$$

であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\sum_{k=1}^{n}\left[(a_k-k)^2+\{a_k-(n-k+1)\}^2\right]\\&=2\sum_{k=1}^{n}a_k^2-2(n+1)\sum_{k=1}^{n}a_k\\&\qquad+\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2\\&=2\sum_{k=1}^{n}k^2-2(n+1)\sum_{k=1}^{n}k\\&\qquad+\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=4\sum_{k=1}^{n}k^2-2(n+1)\sum_{k=1}^{n}k\\&=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{3}n(n+1)\{2(2n+1)-3(n+1)\}\\&=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1).\quad\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(3)　(2) の結果より，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-k)^2=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)-\sum_{k=1}^{n}\{a_k-(n-k+1)\}^2$$

であり，$\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$ は k によらない定数であるから，$\sum_{k=1}^{n}(a_k-k)^2$ が最大となるのは，

$$\sum_{k=1}^{n}\{a_k-(n-k+1)\}^2\ \text{が最小}\quad\cdots\text{②}$$

となるときである．

ここで，$k=1,2,\cdots,n$ に対して，

$$\{a_k-(n-k+1)\}^2\geqq0$$

であるから，②となるのは，

$$a_k-(n-k+1)=0\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

すなわち

$$a_k=n-k+1\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

となるときである．

よって，

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(n,n-1,\cdots,1).\quad\cdots(\text{答})$$

情報学部（情報科学科）、理学部（物理学科・化学科・創造理学コース）、工学部　Ｍ２

$\boxed{3}$ $C(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$, $S(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$

(1) $\begin{cases} x=C(t) \\ y=S(t) \end{cases}$ より, $\begin{cases} x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2} \cdots ① \\ y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2} \cdots ② \end{cases}$

①, ② より

$\begin{cases} e^t=x+y \cdots ③ \\ e^{-t}=x-y \end{cases}$

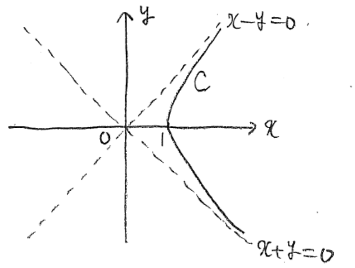
であるから, $(x+y)(x-y)=1$.

すなわち, $x^2-y^2=1 \cdots ④$ ⋯(答)

また, $e^t>0$, $e^{-t}>0$ より $x+y>0$ かつ $x-y>0$

すなわち, $y>-x$ かつ $y<x$.

C の概形は下図のようになる.



⋯(答)

(2) $\dfrac{d}{dt}C(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ ⋯(答)

$\dfrac{d}{dt}S(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ ⋯(答)

(3) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,du$ について

$u=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ と置換すると,

$du=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}dt$,

$1+u^2=1+\dfrac{(e^t-e^{-t})^2}{4}=\dfrac{(e^t+e^{-t})^2}{4}$

より, $\sqrt{1+u^2}=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$.

また, (1) の x, y について, $y=u$ であるから,

$u=0$ すなわち $y=0$ のとき $x=1$ (④より)

③より $e^t=1$ より $t=0$

$u=1$ すなわち $y=1$ のとき $x=\sqrt{2}$ (④より)

③より $e^t=1+\sqrt{2}$ より $t=\log(1+\sqrt{2})$

よって. $\alpha=\log(1+\sqrt{2})$ とすると,

$$\int_0^1\sqrt{1+u^2}\,du=\int_0^\alpha \frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{2}dt$$

$$=\int_0^\alpha \frac{1}{4}(e^{2t}+2+e^{-2t})dt$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t}+2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^\alpha$$

$$=\frac{1}{8}e^{2\alpha}+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{8}e^{-2\alpha}$$

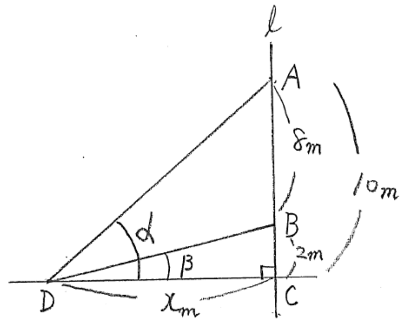
ここで, $\alpha=\log(1+\sqrt{2})$ より $e^\alpha=1+\sqrt{2}$ なので,

$$\int_0^1\sqrt{1+u^2}\,du=\frac{1}{8}(1+\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})-\frac{1}{8(1+\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\right\}$$ ⋯(答)

4

(1)



(i) $\angle ADB=\theta$, $\angle ADC=\alpha$, $\angle BDC=\beta$ のとき,
$\theta=\alpha-\beta$ であるから, 加法定理より,

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}.\quad\cdots(\text{答})$$

(ii) $\tan\alpha=\dfrac{10}{x}$, $\tan\beta=\dfrac{2}{x}$ であるから,
(i) に代入して,

$$\tan\theta=\frac{\frac{10}{x}-\frac{2}{x}}{1+\frac{10}{x}\cdot\frac{2}{x}}=\frac{8x}{x^2+20}.\quad\cdots(\text{答})$$

(iii) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より, θ:最大のとき, $\tan\theta$:最大であり, (ii) より,

$$\tan\theta=\frac{8}{x+\frac{20}{x}}$$

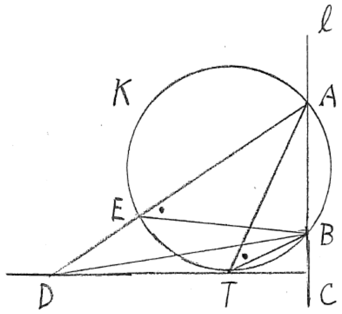
($x>0$, $\dfrac{20}{x}>0$ だから, 相加平均相乗平均の大小関係より, $x+\dfrac{20}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{20}{x}}$)

$$\leqq\frac{8}{2\sqrt{x\cdot\frac{20}{x}}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

等号成立は $x=\dfrac{20}{x}$ $(x>0)$ より, $x=2\sqrt{5}$ のとき.

よって, θ が最大となるとき,
$\tan\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $x=2\sqrt{5}$ $\cdots$(答)

(2)



2点A, Bを通り半直線CDに接する円をKとし, Kと半直線CDの接点をTとおく.

D≠Tのとき
Dは円Kの外部にあり, 線分ADと円Kの交点のうちAでない方をEとおくと, 円周角の定理より,

$\angle ATB=\angle AEB$. ——①

また, △BDEの外角について,

$$\begin{aligned}\angle AEB&=\angle EDB+\angle EBD\\&=\angle ADB+\angle EBD\\&>\angle ADB\end{aligned}\quad\text{——②}$$

①, ②より, D≠Tのとき $\angle ATB>\angle ADB$ となるので, 題意の角(すなわち θ)が最大となる位置は D=T のときである.

(証明終り)