理学部（数学科）　M３

1　取り出し方の総数は 9^3（通り）である。

(1) 積が奇数となるのは，
3回とも 1, 3, 5, 7, 9 のいずれかを取り出す場合であり，5^3（通り）である。
よって，求める確率は，

$$\frac{5^3}{9^3} = \frac{125}{729}\ \cdots(答)$$

(2) 積が3の倍数とならないのは，
3回とも 1, 2, 4, 5, 7, 8 のいずれかを取り出す場合であり，6^3（通り）である。
よって，積が3の倍数となる確率は，

$$1 - \frac{6^3}{9^3} = \frac{19}{27}\ \cdots(答)$$

(3) 積が6と互いに素となるのは，2の倍数のカードも3の倍数のカードも取り出さない場合である。すなわち，3回とも 1, 5, 7 のいずれかを取り出す場合であるので，3^3（通り）である。
よって求める確率は，

$$\frac{3^3}{9^3} = \frac{1}{27}\ \cdots(答)$$

(4) 以下のように事象 A, B を定める。
A：積が2の倍数とならない
B：積が3の倍数とならない
$A \cap B$：積が2の倍数にも3の倍数にもならない
とする。
求める確率は $P(\overline{A \cup B})$ であるので

$$\begin{aligned}
P(\overline{A \cup B}) &= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - \left(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right) \\
&= 1 - \left(\frac{5^3}{9^3} + \frac{6^3}{9^3} - \frac{3^3}{9^3}\right) \\
&= \frac{415}{729}\ \cdots(答)
\end{aligned}$$

理学部（数学科）　Ｍ３

2

(1)　すべての自然数 n に対して，等式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \cdots ①$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i)　$n=1$ のとき．

$$(\text{左辺}) = 1^2 = 1,$$

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 1$$

であるから ① は成り立つ．

(ii)　$n = l\ (\geqq 1)$ のとき．

$$\sum_{k=1}^{l} k^2 = \frac{1}{6}l(l+1)(2l+1)$$

が成り立つと仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{l} k^2 + (l+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}l(l+1)(2l+1) + (l+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(l+1)\{l(2l+1)+6(l+1)\} \\ &= \frac{1}{6}(l+1)(l+2)(2l+3)\end{aligned}$$

であるから，$n=l+1$ のときも ① は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して，① が成り立つことが示された．（証明終り）

(2)　条件より，

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \{1, 2, \cdots, n\}$$

であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \sum_{k=1}^{n}\left[(a_k-k)^2 + \{a_k-(n-k+1)\}^2\right] \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2 \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k \\ &= 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)\{2(2n+1)-3(n+1)\} \\ &= \frac{1}{3}(n-1)n(n+1).\ \cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(3)　(2) の結果より，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-k)^2 = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\{a_k-(n-k+1)\}^2$$

であり，$\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$ は k によらない定数であるから，$\sum_{k=1}^{n}(a_k-k)^2$ が最大となるのは，

$$\sum_{k=1}^{n}\{a_k-(n-k+1)\}^2 \text{ が最小} \cdots ②$$

となるときである．

ここで，$k=1, 2, \cdots, n$ に対して，

$$\{a_k-(n-k+1)\}^2 \geqq 0$$

であるから，② となるのは，

$$a_k-(n-k+1) = 0 \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

すなわち

$$a_k = n-k+1 \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

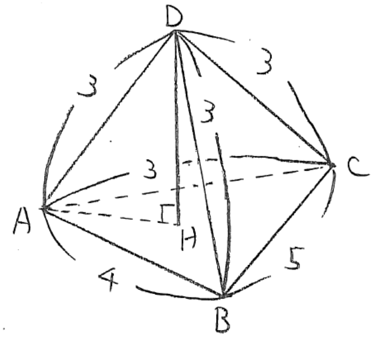
となるときである．

よって，

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (n, n-1, \cdots, 1).\ \cdots(\text{答})$$

理学部（数学科）　M３

3



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos\angle BAD$
$= 4\times3\times\frac{4^2+3^2-3^2}{2\times4\times3}$
$= 8$ …(答)

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos\angle CAD$
$= 3\times3\times\frac{3^2+3^2-3^2}{2\times3\times3}$
$= \frac{9}{2}$ …(答)

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC$
$= 4\times3\times\frac{4^2+3^2-5^2}{2\times4\times3}$
$= 0$

点Hは、平面ABC上より、実数s, tを用いて
$\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ …①
と表すことができる。
$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AD}$
$= s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AB}$より、
$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$
$(s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AB} = 0$
$16s - 8 = 0$
$s = \frac{1}{2}$
$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AC}$より、
$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$
$(s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AC} = 0$
$9t - \frac{9}{2} = 0$
$t = \frac{1}{2}$
よって、①より、
$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ …(答)

(3) $|\overrightarrow{AH}|^2 = \left|\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\right|^2$
$= \frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2\right)$
$= \frac{1}{4}(4^2 + 3^2)$
$= \frac{25}{4}$
三角形AHDで三平方の定理より、
$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2}$
$= \sqrt{3^2 - \frac{25}{4}}$
$= \frac{\sqrt{11}}{2}$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, $|\overrightarrow{AB}| \neq 0$, $|\overrightarrow{AC}| \neq 0$であるから、
$\angle BAC = 90^\circ$
よって、三角形ABCの面積Sは、
$S = AB\times AC\times\frac{1}{2}$
$= 4\times3\times\frac{1}{2}$
$= 6$
したがって、四面体ABCDの体積Vは、
$V = S\times DH\times\frac{1}{3}$
$= 6\times\frac{\sqrt{11}}{2}\times\frac{1}{3}$
$= \sqrt{11}$ …(答)

理学部（数学科）　Ｍ３

4

(1) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4$

$= 2(x+1)(2x-1)(x-2)$.

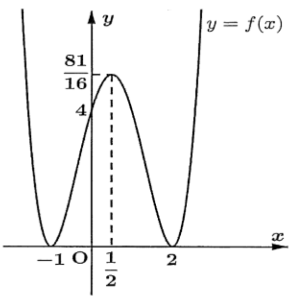
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{81}{16}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

…（答）

極大値 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{16}$. …（答）

極小値 $f(-1) = f(2) = 0$. …（答）

グラフの概形は次のようになる.



…（答）

(2) 部分積分を利用して,

$\int_0^1 x^{a+1}(1-x)^b dx$

$= \left[\frac{-1}{b+1} x^{a+1}(1-x)^{b+1}\right]_0^1 + \frac{a+1}{b+1}\int_0^1 x^a (1-x)^{b+1} dx$

$= \frac{a+1}{b+1}\int_0^1 x^a(1-x)^{b+1} dx$.　（証明終り）

(3) 求める面積を S とすると, グラフより

$S = \int_{-1}^2 (x+1)^2(x-2)^2 dx$.

$x+1 = 3t$ とおくと　$dx = 3dt$

x	$-1 \to 2$
t	$0 \to 1$

$S = \int_0^1 (3t)^2(3t-3)^2 \cdot 3dt$

$= 3^5 \int_0^1 t^2(1-t)^2 dt$.

(2) を用いて,

$S = 3^5 \cdot \frac{2}{3}\int_0^1 t(1-t)^3 dt$

$= 3^5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)^4 dt$

$= 3^5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{5}(1-t)^5\right]_0^1$

$= \frac{81}{10}$.　…（答）

(4) 求める体積を V とすると

$V = \int_{-1}^2 \pi\{(x+1)^2(x-2)^2\}^2 dx$.

$x+1 = 3t$ とおくと　$dx = 3dt$

x	$-1 \to 2$
t	$0 \to 1$

$V = \pi\int_0^1 (3t)^4(3t-3)^4 3dt$

$= 3^9\pi\int_0^1 t^4(1-t)^4 dt$.

(2) を用いて,

$V = 3^9\pi \cdot \frac{4}{5}\int_0^1 t^3(1-t)^5 dt$

$= 3^9\pi \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{6}\int_0^1 t^2(1-t)^6 dt$

$= 3^9\pi \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{7}\int_0^1 t(1-t)^7 dt$

$= 3^9\pi \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{8}\int_0^1 (1-t)^8 dt$

$= 3^9\pi \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{9}(1-t)^9\right]_0^1$

$= \frac{2187}{70}\pi$.　…（答）