I

〔1〕
$$\begin{cases} 2\vec{a}-3\vec{b}=(1,\ 9)\ , & \cdots① \\ -\vec{a}+2\vec{b}=(0,\ -5)\ . & \cdots② \end{cases}$$

① × 2 + ② × 3 より,

$$\vec{a}=2(1,\ 9)+3(0,\ -5)=\left({}^{ア}\boxed{2},{}^{イ}\boxed{3}\right)\ .$$

① + ② × 2 より,

$$\vec{b}=(1,\ 9)+2(0,\ -5)=\left({}^{ウ}\boxed{1},{}^{エ}\boxed{-1}\right)\ .$$

よって,

$$\left.\begin{aligned} |\vec{a}|^2&=2^2+3^2=13\ , \\ |\vec{b}|^2&=1^2+(-1)^2=2\ , \\ \vec{a}\cdot\vec{b}&=2\cdot1+3\cdot(-1)=-1\ . \end{aligned}\right\}\cdots(*)$$

ここで, $\vec{a}+2\vec{b}$ が $p\vec{a}+\vec{b}$ が垂直になるとき,

$$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(p\vec{a}+\vec{b})=0\ .$$

$$p(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b})+(\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2)=0\ .$$

したがって, $(*)$ より

$$11p+3=0 \quad \text{すなわち} \quad p\overset{オ}{=}\boxed{-\frac{3}{11}}\ .$$

また, $\vec{a}+2\vec{b}$ が $q\vec{a}+\vec{b}$ が平行になるとき, 実数 k を用いて

$$q\vec{a}+\vec{b}=k(\vec{a}+2\vec{b})$$

と表せる. $\vec{a}$, $\vec{b}$ は 1 次独立であるから,

$$q=k \text{ かつ } 1=2k \quad \text{より} \quad q\overset{カ}{=}\boxed{\frac{1}{2}}\ .$$

さらに, $|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$ であるから, $|\vec{a}+t\vec{b}|$ が最大・最小となるときは, $|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ が最大・最小となるときとそれぞれ一致する.

$$\begin{aligned} |\vec{a}+t\vec{b}|^2&=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2 \\ &=13-2t+2t^2 \quad (\ (*)\ \text{より}\ ) \\ &=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{2} \end{aligned}$$

であるから, t が $-2\leqq t\leqq 2$ を変化するとき, $t=-2$ で $|\vec{a}+t\vec{b}|$ は最大となり, 最大値は

$$\sqrt{13-2\cdot(-2)+2\cdot(-2)^2}\overset{キ}{=}\boxed{5}\ .$$

また, $t=\dfrac{1}{2}$ で最小となり, 最小値は

$$\sqrt{\frac{25}{2}}\overset{ク}{=}\boxed{\frac{5}{\sqrt{2}}}\ .$$

〔2〕
$$\begin{cases} \log_3(x+2)-\log_3(y+5)=-1\ , & \cdots① \\ 3^{x+1}+3^y=30\ . & \cdots② \end{cases}$$

① において, 真数条件より

$$x+2>0 \quad \text{かつ} \quad y+5>0\ . \qquad \cdots③$$

この条件の下, ① より

$$\log_3(y+5)=\log_3(x+2)+1\ .$$

$$\log_3(y+5)=\log_3 3(x+2)\ .$$

$$y+5=3(x+2)\ .$$

③ とあわせて, ① は

$$y+5=3(x+2)>0$$

と同値であるから,

$$x\overset{ケ}{>}\boxed{-2} \quad \text{かつ} \quad y\overset{コ}{=}\boxed{3x+1}\ .$$

$y=3x+1$ を ② に代入すると,

$$3^{x+1}+3^{3x+1}=30\ .$$

$$3^1\cdot3^x+3^1\cdot(3^x)^3=30\ .$$

よって, $t=3^x$ とおくと,

$$3t+3t^3=30\ .$$

$$^{サ}\boxed{t^3+t-10}=0\ .$$

$$(t-2)(t^2+2t+5)=0\ .$$

ここで, $x>-2$ より $t>3^{-2}\overset{シ}{=}\boxed{\dfrac{1}{9}}$ であるから,

$$t\overset{ス}{=}\boxed{2}\ , \quad x=\log_3 t\overset{セ}{=}\boxed{\log_3 2}\ .$$

したがって,

$$y=3x+1\overset{ソ}{=}\boxed{3\log_3 2+1}\ .$$

このとき, $kx\geqq6$ であれば,

$$k\geqq\frac{6}{\log_3 2}=\frac{\log_3 3^6}{\log_3 2}=\log_2 729 \qquad \cdots④$$

であり,

$$512<729<1024 \quad \text{より} \quad 2^9<729<2^{10}$$

であるから,

$$9<\log_2 729<10\ .$$

よって, ④ を満たす最小の整数 k は ${}^{タ}\boxed{10}$ である.

〔3〕 (a) $x^2 - px + \frac{1}{4}q = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつことから

$$(\text{判別式}) = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}q > 0 .$$

$$q \overset{\text{チ}}{<} \boxed{p^2} . \qquad \cdots (*)$$

また, 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = p , \quad \alpha\beta = \frac{1}{4}q$$

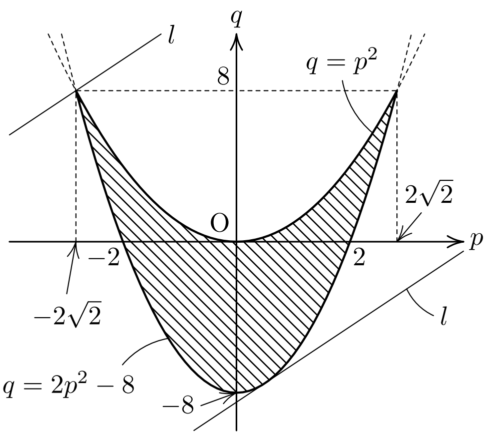
となるので, 条件 $\alpha^2 + \beta^2 < 4$ から

$$p^2 - \frac{1}{2}q < 4 .$$

$$q \overset{\text{ツ}}{>} \boxed{2p^2 - 8} .$$

(b) $-2p + q = k$ とおいたときに, 直線 $l : q = 2p + k$ が領域 D_1 と共通点をもつような k の範囲を求めればよい.

領域 D_1 を図示すると次図の斜線部 (境界を除く) のようになる.



l が $q = 2p^2 - 8$ と接するとき,

$$2p + k = 2p^2 - 8 \Longleftrightarrow 2p^2 - 2p - 8 - k = 0$$

が重解をもつから

$$(\text{判別式})/4 = 1^2 - 2 \cdot (-8 - k) = 0 .$$

$$k = -\frac{17}{2} .$$

また，l が点 ($-2\sqrt{2}$, 8) を通るとき,

$$8 = -4\sqrt{2} + k .$$

$$k = 8 + 4\sqrt{2} .$$

よって，グラフより $k = -2p + q$ のとり得る値の範囲は

$$\overset{\text{テ}}{\boxed{-\frac{17}{2}}} < -2p + q \overset{\text{ト}}{<} \boxed{8 + 4\sqrt{2}} .$$

(c) 以下, $(*)$ の条件の下で考える.

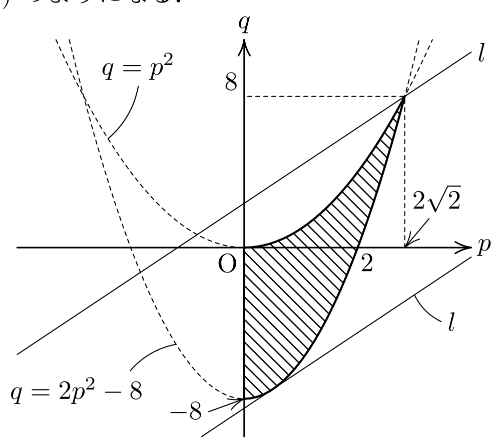
条件 $\alpha > 0$, $\alpha^2 > \beta^2$ と条件 $-\alpha < \beta < \alpha$ は同値となる.

よって, $p = \alpha + \beta > 0$ となる.

逆に, $p > 0$ のとき, $x^2 - px + \frac{1}{4}q = 0$ の 2 解を α , β ($\alpha > \beta$) とすれば，$p = \alpha + \beta > 0$ より $-\alpha < \beta$ となる.

よって，$(*)$ の条件の下，条件 $\alpha > 0$, $\alpha^2 > \beta^2$ と条件 $p > 0$ が同値だとわかった.

領域 D_2 を図示すると次図の斜線部 (境界を除く) のようになる.



また，l が点 ($2\sqrt{2}$, 8) を通るとき,

$$8 = 4\sqrt{2} + k .$$

$$k = 8 - 4\sqrt{2} .$$

よって，グラフより $k = -2p + q$ のとり得る値の範囲は

$$-\frac{17}{2} < -2p + q \overset{\text{ナ}}{<} \boxed{8 - 4\sqrt{2}} .$$

II

$S_1=1000$, $S_2=3000$, $S_3=5000$, $S_4=7000$ のとき，

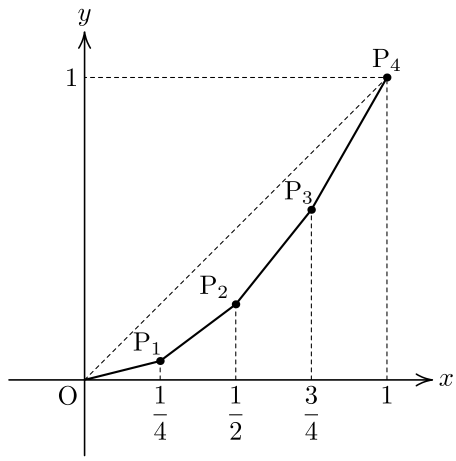
$$a_n=\frac{S_n}{16000}\ ,\ b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\quad (\ n=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ )$$

であるから，

$$a_1=\frac{1}{16},\quad a_2=\frac{3}{16},\quad a_3=\frac{5}{16},\quad a_4=\frac{7}{16}\ .$$

$$b_1=\overset{ア}{\boxed{\frac{1}{16}}},\quad b_2=\frac{4}{16}=\overset{イ}{\boxed{\frac{1}{4}}},\quad b_3=\overset{ウ}{\boxed{\frac{9}{16}}},\quad b_4=1\ .$$

よって，点 $(\,c_n,\,b_n\,)$ を P_n ($n=1\ ,2\ ,3\ ,4$) ，原点を O とすると，ローレンツ曲線は次図の折れ線 $\mathrm{OP_1P_2P_3P_4}$ である．



よって，ローレンツ曲線と直線 $x=1$ および x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot b_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(b_1+b_2)\\&\qquad+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(b_2+b_3)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(b_3+b_4)\\&=\frac{1}{4}(b_1+b_2+b_3)+\frac{1}{8}\end{aligned}$$

であるから，ローレンツ曲線と直線 $y=x$ で囲まれた部分の面積を T とすると，

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1-\left\{\frac{1}{4}(b_1+b_2+b_3)+\frac{1}{8}\right\}\\&=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}(b_1+b_2+b_3)\qquad\cdots(*)\\&=\overset{エ}{\boxed{\frac{5}{32}}}\ .\end{aligned}$$

よって，ジニ係数は

$$\frac{T}{\frac{1}{2}\cdot1\cdot1}=2T=\overset{オ}{\boxed{\frac{5}{16}}}\ .$$

次に，$S_1=S_2=S_3=S_4=4000$ のとき，

$$a_1=a_2=a_3=a_4=\frac{1}{4}$$

であるから，

$$b_1=\frac{1}{4},\quad b_2=\frac{1}{2},\quad b_3=\frac{3}{4},\quad b_4=1\ .$$

したがって，ローレンツ曲線は直線 $y=x$ と重なるからジニ係数は$\overset{カ}{\boxed{0}}$.

また，$S_1=S_2=S_3=0$, $S_4=16000$ のとき，

$$a_1=a_2=a_3=0\ ,\quad a_4=1$$

であるから，

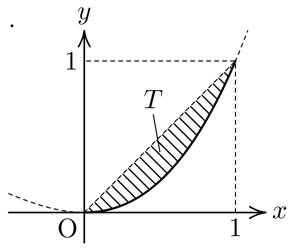
$$b_1=b_2=b_3=0\ ,\quad b_4=1\ .$$

よって，$(*)$ よりジニ係数は

$$2T=\overset{キ}{\boxed{\frac{3}{4}}}\ .$$

一般に，ジニ係数は，分配の不均等の度合が小さいほど$\overset{ク}{\boxed{0}}$ に近い値をとり，分配の不均等の度合が大きいほど$\overset{ケ}{\boxed{1}}$ に近い値をとる．(したがって，$\boxed{クケ}$ 欄に入れるべき番号は ③)．

次に，ローレンツ曲線が $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{3}x^2$ のとき，

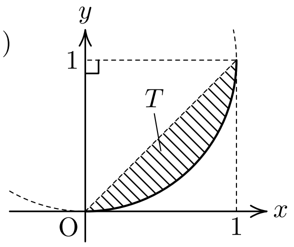


$$\begin{aligned}\text{面積 }T&=\int_0^1\left\{x-\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2\right)\right\}dx\\&=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{9}x^3\right]_0^1\\&=\frac{7}{36}\end{aligned}$$

であるから，ジニ係数は

$$2T=\overset{コ}{\boxed{\frac{7}{18}}}\ .$$

また，ローレンツ曲線が $x^2+(y-1)^2=1$ (四分円) のとき，



$$\text{面積 }T=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

であるから，ジニ係数は

$$2T=\overset{サ}{\boxed{\frac{1}{2}}}\pi-\overset{シ}{\boxed{1}}\ .$$

III

〔1〕 $a_n = 1+2(n-1) = 2n-1$, $b_n = 1\cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$
とかけるので

$$P_n = a_n + b_n = 2n - 1 + 3^{n-1}$$

となる．よって

$$T_8 = \sum_{k=1}^{8} P_k = \frac{8}{2}(1+15) + \frac{1-3^8}{1-3} = \mathbf{3344} \quad \cdots(答)$$

となる．

〔2〕 $a_n = a + d(n-1)$, $b_n = b\cdot r^{n-1}$ とかけるので

$$P_2 = a + d + br = 12 \ ,$$

$$P_4 = a + 3d + br^3 = 138 \ .$$

となる．この 2 式から a を消去して

$$2d + b(r^3 - r) = 126 \qquad \cdots(*)$$

が得られる．

ここで，

$$r^3 - r = (r-1)r(r+1)$$

は連続する 3 整数の積であるので，6 の倍数になることに注意すると，$(*)$ より $2d$ も 6 の倍数になり，$2 \leqq b < d \leqq 4$ なので

$$d = 3$$

と分かる．また，$2 \leqq b < d$ であるので，$b = 2$ となり，$(*)$ の式に代入すると

$$6 + 2(r^3 - r) = 126 \iff r^3 - r - 60 = 0$$

が得られる．このとき

$$r^3 - r - 60 = (r-4)(r^2 + 4r + 15) = 0$$

となり, $r^2 + 4r + 15 = 0$ は実数解をもたないので, $r = 4$ となる．

P_2 の式に $d = 3$, $b = 2$, $r = 4$ を代入すると

$$P_2 = a + 3 + 2\cdot 4 = 12 \iff a = 1$$

となる．よって

$$\left.\begin{aligned} &a_n = 1 + 3(n-1) = \mathbf{3n - 2} \ , \\ &b_n = \mathbf{2\cdot 4^{n-1}} \end{aligned}\right\} \cdots(答)$$

が得られる．

〔3〕 $Q_n = a_n \cdot b_n = (3n-2)\cdot 2\cdot 4^{n-1} = (6n-4)\cdot 4^{n-1}$
となる．

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Q_n = \sum_{k=1}^{n}(等差数列)\cdot(等比数列)$$

であることに注意して計算する．

$S_n - 4S_n$

$= (6-4)\cdot 4^0 + 6\cdot 4\cdot \dfrac{1-4^{n-1}}{1-4} - (6n-4)\cdot 4^n$

$= (6-6n)\cdot 4^n - 6$　（ $n = 1$ でも成り立つ ）

となるので

$$S_n = \mathbf{(2n-2)\cdot 4^n + 2} \qquad \cdots(答)$$

と求まる．

〔4〕 S_n に $n = 76$ を代入すると

$$\begin{aligned} S_{76} &= (2\cdot 76 - 2)\cdot 4^{76} + 2 \\ &= 150\cdot 4^{76} + 2 \\ &= 10^2\cdot 3\cdot 2^{151} + 2 \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} \log_{10}(10^2\cdot 3\cdot 2^{151}) &= 2 + 0.4771 + 151\times 0.3010 \\ &= 47.9281 \end{aligned}$$

となるので, $10^2\cdot 3\cdot 2^{151}$ は 48 桁と分かる．

一方, $10^2\cdot 3\cdot 2^{151}$ の一の位の数字は 0 であるので 2 を足してもくり上がりはなく，$S_{76} = 10^2\cdot 3\cdot 2^{151} + 2$ も **48** 桁と分かる．　$\cdots$(答)