I

［1］与えられた図において，右向き，奥向き，上向きに，一つの立方体の辺の長さだけ移動することを，それぞれ x，y，z と表すことにする．

(a) 点Aから点Pまでの経路は3文字 xxy の並べ方と1対1に対応し，

$$\frac{3!}{2!1!}=\boxed{3}_{ア}\text{通り．}$$

点Aから点Bまでの経路は6文字 $xxxxyy$ の並べ方と1対1に対応し，

$$\frac{6!}{4!2!}=\boxed{15}_{イ}\text{通り．}$$

点Pから点Bまでの経路は3文字 xxy の並べ方と1対1に対応するからAからPと同様に3通り．よって点Aから点Pを通って点Bまで至る経路は，

$$3\times3=\boxed{9}_{ウ}\text{通り．}$$

(b) 点Aから点Cまでの経路は6文字 $xxyyzz$ の並べ方と1対1に対応し，

$$\frac{6!}{2!2!2!}=\boxed{90}_{エ}\text{通り．}$$

そのうち点Pと点Rの両方を通る経路は，AからPの経路が3通り，PからRの経路が1通り，RからCの経路が2通りあることから，

$$3\times1\times2=\boxed{6}_{オ}\text{通り．}$$

(c) 点Dの左隣の点をEとし，点Cと点Eを結んだ立体図形で考えると，点Aから点Dまでの経路は8文字 $xxxxyyzz$ の並べ方と1対1に対応し，

$$\frac{8!}{4!2!2!}=420\text{通り．}$$

このうち，線分CEを通る経路の数は，点Cに到着すればその後の経路は1通りしかないことから，点Aから点Cまでの経路の数に等しく，90通り．

よって，求める経路の数は，

$$420-90=\boxed{330}_{カ}\text{通り．}$$

［2］［1］(b)の結果により，点Aから出発して点Cに到着するという条件の下で点Pと点Rの両方を通る確率（条件付き確率）は，

$$\frac{6}{90}=\boxed{\frac{1}{15}}_{キ}.$$

また，点Aから点Pを通って点Cに到着する経路の数は，AからPの経路が3通り，PからCの経路が3通りあるから，

$$3\times3=9\text{通り．}$$

これらの経路の中で点Rも通っているものは6通りあるから，点Aから出発して点Pを通って点Cに到着するという条件の下で点Rを通る確率（条件付き確率）は，

$$\frac{6}{9}=\boxed{\frac{2}{3}}_{ク}.$$

Ⅱ

点 Q (x, y) は $C : x = y^2$ 上にあるから，

$x = y^2$ …①，$x \geqq 0$ …②

を満たす．2点 $P(a, 0)$，$Q(x, y)$ の距離は，

$\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-a)^2+x}$ （①より）

$= \boxed{\sqrt{x^2-(2a-1)x+a^2}}$ …(ア)(答)

$f(x) = \sqrt{x^2-(2a-1)x+a^2}$．

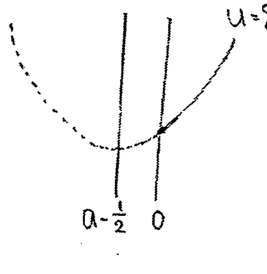
$g(x) = x^2-(2a-1)x+a^2$ とおくと，

$g(x) = \left(x - \dfrac{2a-1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{2a-1}{2}\right)^2 + a^2$

$= \left\{x-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)\right\}^2 + a - \dfrac{1}{4}$．

$f(x)$ が最小値をとるときの x の値と $g(x)$ が最小値をとるときの x の値は一致するから，②より $x \geqq 0$ における $g(x)$ の最小値を考えればよい．

(i) $a-\frac{1}{2} \leqq 0$，すなわち，$a \leqq \boxed{\frac{1}{2}}$ のとき．…(イ)(答)



上のグラフより，$x \geqq 0$ において，$g(x)$ は $x = 0$ のとき最小値 $g(0) = a^2$ をもつ．

したがって，このとき $f(x)$ は $x = \boxed{0}$ …(ウ)(答)

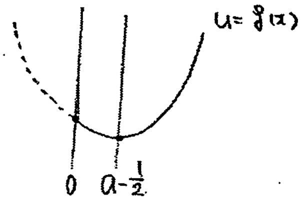
で最小値

$f(0) = \sqrt{g(0)} = \boxed{a}$ （$a > 0$ より）…(エ)(答)

をもつ．①に $x = 0$ を代入することにより，$y = 0$．よって，2点 P と Q の距離が最小となる点 Q は $\boxed{1}$ 個で，…(オ)(答)

その点の座標は $\boxed{(0, 0)}$．…(カ)(答)

(ii) $a-\frac{1}{2} > 0$，すなわち，$a > \frac{1}{2}$ のとき．



上のグラフより，$x \geqq 0$ において $g(x)$ は $x = a-\frac{1}{2}$ のとき最小値 $g\left(a-\frac{1}{2}\right) = a-\frac{1}{4}$ をもつ．

したがって，このとき $f(x)$ は $x = \boxed{a-\frac{1}{2}}$ …(キ)(答) で最小値

$f\left(a-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{g\left(a-\frac{1}{2}\right)} = \boxed{\sqrt{a-\frac{1}{4}}}$ …(ク)(答)

をもつ．①に $x = a-\frac{1}{2}$ を代入することにより，$y = \pm\sqrt{a-\frac{1}{2}}$．よって，2点 P，Q の距離が最小となる点 Q は $\boxed{2}$ 個で，…(ケ)(答)

その点の座標は

$\boxed{\left(a-\frac{1}{2}, \sqrt{a-\frac{1}{2}}\right), \left(a-\frac{1}{2}, -\sqrt{a-\frac{1}{2}}\right)}$ …(コ)(答)

III

ド・モアブルの定理より，

$$\omega^5=\cos 5\theta+i\sin 5\theta$$

であり，これが1であるから，整数nを用いて

$$5\theta=2n\pi \quad \text{すなわち} \quad \theta=\frac{2}{5}n\pi.$$

$0\leqq\theta<2\pi$，$\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$ より

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

であるから，

$$\theta=\boxed{\frac{2}{5}\pi}_{ア}.$$

また，

$$\omega^5-1=0$$
$$(\omega-1)(\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1)=0$$

であり，$\omega\neq1$ であるから，

$$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=\boxed{0}_{イ}. \cdots ①$$

次に，

$$(1-\omega z)(1-\omega^2 z)(1-\omega^3 z)(1-\omega^4 z)$$

の展開式におけるそれぞれの項の係数を計算する．定数項は1．zの係数は，

$$-\omega-\omega^2-\omega^3-\omega^4=\boxed{1}_{ウ}. \ (①より)$$

z^2 の係数は，

$$\begin{aligned}&\omega\omega^2+\omega\omega^3+\omega\omega^4+\omega^2\omega^3+\omega^2\omega^4+\omega^3\omega^4\\&=\omega^3+\omega^4+2\omega^5+\omega^6+\omega^7\\&=\omega^3+\omega^4+2+\omega+\omega^2 \ (\omega^5=1より)\\&=\boxed{1}_{エ}. \ (①より)\end{aligned}$$

z^3 の係数は，

$$\begin{aligned}&-\omega\omega^2\omega^3-\omega\omega^2\omega^4-\omega\omega^3\omega^4-\omega^2\omega^3\omega^4\\&=-\omega-\omega^2-\omega^3-\omega^4 \ (\omega^5=1より)\\&=\boxed{1}_{オ}. \ (①より)\end{aligned}$$

z^4 の係数は，

$$\omega\omega^2\omega^3\omega^4=\omega^{10}=\boxed{1}_{カ}. \ (\omega^5=1より)$$

よって，

$$\begin{aligned}&(1-\omega z)(1-\omega^2 z)(1-\omega^3 z)(1-\omega^4 z)\\&=1+z+z^2+z^3+z^4.\end{aligned}$$

$z=\alpha$, $\omega^4\alpha$, $\omega^3\alpha$, $\omega^2\alpha$, $\omega\alpha$ を順に代入すると，

$$\begin{aligned}&(1-\omega\alpha)(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha)\\&=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4,\\&(1-\omega\alpha)(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^5\alpha)\\&=1+\omega^4\alpha+\omega^8\alpha^2+\omega^{12}\alpha^3+\omega^{16}\alpha^4,\\&(1-\omega\alpha)(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^4\alpha)(1-\omega^5\alpha)\\&=1+\omega^3\alpha+\omega^6\alpha^2+\omega^9\alpha^3+\omega^{12}\alpha^4,\\&(1-\omega\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha)(1-\omega^5\alpha)\\&=1+\omega^2\alpha+\omega^4\alpha^2+\omega^6\alpha^3+\omega^8\alpha^4,\\&(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha)(1-\omega^5\alpha)\\&=1+\omega\alpha+\omega^2\alpha^2+\omega^3\alpha^3+\omega^4\alpha^4.\end{aligned}$$

辺ごとに加えることにより，式（$*$）の右辺は，

$$\begin{aligned}&(1+1+1+1+1)\\&+(1+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega)\alpha\\&+(1+\omega^8+\omega^6+\omega^4+\omega^2)\alpha^2\\&+(1+\omega^{12}+\omega^9+\omega^6+\omega^3)\alpha^3\\&+(1+\omega^{16}+\omega^{12}+\omega^8+\omega^4)\alpha^4\\&=5+(1+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega)\alpha\\&+(1+\omega^3+\omega+\omega^4+\omega^2)\alpha^2\\&+(1+\omega^2+\omega^4+\omega+\omega^3)\alpha^3\\&+(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)\alpha^4 \ (\omega^5=1より)\\&=\boxed{5}_{キ}. \ (①より)\end{aligned}$$

$\alpha=\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}$ であるとき，

$$\begin{aligned}&(1-\omega\alpha)(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha)(1-\omega^5\alpha)\\&=(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)(1-\alpha) \ (\omega^5=1より)\\&=1-\alpha^5\\&=1-\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \ (ド・モアブルの定理より)\\&=\boxed{\frac{1}{2}}_{ク}-i\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{ケ}.\end{aligned}$$

式（$*$）を式（$**$）で割ると，

$$\frac{1}{1-\omega^5\alpha}+\frac{1}{1-\omega^4\alpha}+\frac{1}{1-\omega^3\alpha}+\frac{1}{1-\omega^2\alpha}+\frac{1}{1-\omega\alpha}=\frac{5}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

よって，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1-\omega\alpha}+\frac{1}{1-\omega^2\alpha}+\frac{1}{1-\omega^3\alpha}+\frac{1}{1-\omega^4\alpha}+\frac{1}{1-\omega^5\alpha}\\&=5\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=\boxed{\frac{5}{2}}_{コ}+i\boxed{\frac{5}{2}\sqrt{3}}_{サ}.\end{aligned}$$

IV

$x=\cos\theta$ とおく．

$$\lim_{x\to 1-0} T_n(x)=\lim_{\theta\to +0}\cos n\theta=\boxed{1}\quad\cdots(ア)(答)$$

$$\lim_{x\to 1-0} U_n(x)=\lim_{\theta\to +0}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to +0}\frac{\frac{\sin n\theta}{n\theta}}{\frac{\sin\theta}{\theta}}\times\frac{n\theta}{\theta}$$

$$=\boxed{n}.\quad\cdots(イ)(答)$$

加法定理より，

$$T_{n+1}(x)=\cos(n+1)\theta$$

$$=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta$$

$$=\cos\theta\cdot\cos n\theta-\sin^2\theta\cdot\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}.$$

上式において $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから，

$$T_{n+1}(x)=\boxed{x}T_n(x)-\boxed{(1-x^2)}U_n(x).\quad\cdots①$$

$\cdots$(ウ),(エ)(答)

また，

$$U_{n+1}(x)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$=\cos n\theta+\cos\theta\cdot\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

であるから，

$$U_{n+1}(x)=T_n(x)+\boxed{x}U_n(x).\quad\cdots②$$

$\cdots$(オ)(答)

②より，

$$T_n(x)=U_{n+1}(x)-xU_n(x),$$

$$T_{n+1}(x)=U_{n+2}(x)-xU_{n+1}(x).$$

これらを①に代入することにより，

$$U_{n+2}(x)-xU_{n+1}(x)$$

$$=x(U_{n+1}(x)-xU_n(x))-(1-x^2)U_n(x).$$

これより，

$$U_{n+2}(x)=\boxed{2x}U_{n+1}(x)-U_n(x).\quad\cdots③$$

$\cdots$(カ)(答)

$U_n(x)$ の定義より，

$$U_1(x)=\frac{\sin\theta}{\sin\theta}=1,$$

$$U_2(x)=\frac{\sin2\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta=2x.$$

これらと③より

$$U_3(x)=2xU_2(x)-U_1(x)=4x^2-1,$$

$$U_4(x)=2xU_3(x)-U_2(x)$$

$$=2x(4x^2-1)-2x$$

$$=8x^3-4x$$

を得るから，

$$x^2=\frac{1}{4}(U_3(x)+1)=\boxed{\frac{1}{4}}U_3(x)+\boxed{\frac{1}{4}}U_1(x).$$

$\cdots$(キ)(ク)(答)

$$x^3=\frac{1}{8}(U_4(x)+4x)=\boxed{\frac{1}{8}}U_4(x)+\boxed{\frac{1}{4}}U_2(x).$$

$\cdots$(ケ)(コ)(答)