$\boxed{1}$

(1) Sが1勝もせずに優勝が決まるのは，Tが4連勝するときで，この確率は，

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1}{9}.$$

よって，求める確率は，

$$1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}.$$

(2) TのホームゲームでTが優勝するのは次の場合である．

1戦	2戦	3戦	4戦	5戦
T	T	T	T	
S	T	T	T	T
T	S	T	T	T
T	T	S	T	T
T	T	T	S	T

（S, Tは試合の勝利チームを表す）

よって，求める確率は，

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot 2+\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot 2$$

$$=\frac{23}{54}.$$

(3) 事象A, Bを

A：1戦，2戦ともSが勝つ

B：Tが優勝する

と定めると，

$$P(A)=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}.$$

$A\cap B$ となるのは次の場合である．

1戦	2戦	3戦	4戦	5戦	6戦	7戦
S	S	T	T	T	T	
S	S	S	T	T	T	T
S	S	T	S	T	T	T
S	S	T	T	S	T	T
S	S	T	T	T	S	T

（S, Tは試合の勝利チームを表す）

よって，

$$P(A\cap B)=P(A)\times\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot 3+\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\right\}$$

$$=\frac{9}{25}\cdot\frac{23}{54}$$

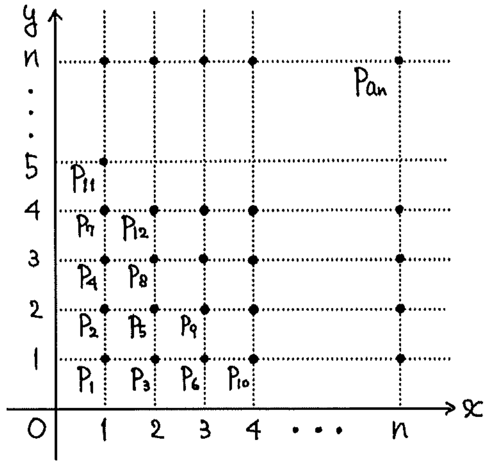
であるから，求める確率は，

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{9}{25}-\frac{9}{25}\cdot\frac{23}{54}$$

$$=\frac{31}{150}.$$

2



(1) 上図より，

点$(2,4)$は12番目の点．

$P_{10}(4,1)$.

(2) Dに属する点のうち

$x+y=k$ $(k=2,3,4,\cdots)$ となるものは，

$(1,k-1),(2,k-2),\cdots,(k-1,1)$

の$(k-1)$個.

点(n,n)はDに属する$x+y=2n$となる点のうちx座標が小さい方からn番目の点であるから，

$$a_n=\sum_{k=2}^{2n-1}(k-1)+n$$

$$=\frac{1}{2}(2n-2)\{1+(2n-2)\}+n$$

$$=2n^2-2n+1.$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k+1)$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{3}n\{(n+1)(2n+1)-3(n+1)+3\}$$

$$=\frac{1}{3}n(2n^2+1).$$

3

(1) nが整数のとき，

$$n^3-n=(n-1)n(n+1)$$

であり，$(n-1)n(n+1)$ は連続する3整数の積なので 6の倍数である．

したがって，nを6で割った余りと，n^3を6で割った余りは等しい．

(2) (1)より，

a^3+b^3 と $a+b$ を6で割った余りは等しい．

整数 a, b, c が条件

$$a^3+b^3+c^3=(c+1)^3 \qquad (*)$$

を満たすとき，

$$a^3+b^3=3c(c+1)+1. \quad \cdots ①$$

$c(c+1)$ は連続する2整数の積なので偶数である．

したがって，$3c(c+1)$ は6の倍数であり，a^3+b^3 を6で割った余りは 1．

よって，

$a+b$ を6で割った余りは 1．

(3) ①より，

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= 3c(c+1)+1 \\ &\leqq 3\cdot 10\cdot 11+1 \\ &= 331 \end{aligned}$$

である．

$n \geqq 7$ のとき，$n^3 \geqq 343$

であるから，

$$b \leqq 6$$

である．

したがって，$1 \leqq a \leqq b \leqq 6$ であり

$$2 \leqq a+b \leqq 12$$

であるから，(*)が成り立つとき，(2)より，

$$a+b=7$$

に限られる．

このとき，

$$(a,b)=(1,6),(2,5),(3,4)$$

のいずれかであり，このうち(*)を満たす c が存在するものは，①より，

$$(a,b)=(1,6),(3,4)$$

であり，

$(a,b)=(1,6)$ のとき，$c=8$，

$(a,b)=(3,4)$ のとき，$c=5$．

したがって，

$$(a,b,c)=(1,6,8),(3,4,5).$$

$\boxed{4}$

$f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$ とおくと，

$$\begin{cases} f(1)=a+b+c=1 \\ f(-1)=a-b+c=-1 \end{cases}$$

より，

$$c=-a,\ b=1.$$

よって，

$$f(x)=ax^2+x-a$$
$$=a\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2-a-\frac{1}{4a}.$$

(1) $-\dfrac{1}{2a}>0$ のとき，

$$a<0.$$

このとき，

$$-a>0,\ -\frac{1}{4a}>0$$

より，相加平均と相乗平均の大小関係から，

$$(\text{頂点の}y\text{座標})=-a-\frac{1}{4a}$$
$$\geqq 2\sqrt{(-a)\cdot\left(-\frac{1}{4a}\right)}$$
$$=1.$$

等号成立は，

$-a=-\dfrac{1}{4a}$ つまり $a=-\dfrac{1}{2}$ のとき．

よって，

$$(\text{頂点の}y\text{座標の最小値})=1.$$

(2) $0\leqq -a-\dfrac{1}{4a}\leqq 2$ のとき，$a<0$ であり，

$$0\leqq 4a^2+1\leqq -8a$$

より，

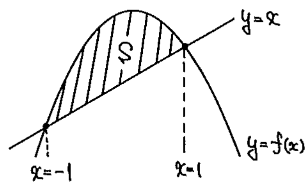
$$4a^2+8a+1\leqq 0$$

$$\frac{-2-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq \frac{-2+\sqrt{3}}{2}. \quad \cdots ①$$

$y=f(x)$ が2点 $(1,1)$，$(-1,-1)$ を通ることから，

$y=f(x)$ と $y=x$ で囲まれた図形の面積を S とすると，

S は次図の斜線部分の面積である



$$S=\int_{-1}^{1}\{(ax^2+x-a)-x\}dx$$
$$=2a\int_0^1(x^2-1)\,dx$$
$$=2a\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^1$$
$$=-\frac{4}{3}a.$$

① より，

$$(S\text{の最大値})=\frac{4+2\sqrt{3}}{3},$$

$$(S\text{の最小値})=\frac{4-2\sqrt{3}}{3}.$$