$\boxed{1}$

(1) $\sin 3x = -\sin x$ より,

$3\sin x - 4\sin^3 x = -\sin x$.

$4\sin x(\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$.

$\sin x = -1, 0, 1$.

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より,

$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$.

(2) $\sin 3x = \sin x$ より,

$3\sin x - 4\sin^3 x = \sin x$.

$2\sin x(\sqrt{2}\sin x + 1)(\sqrt{2}\sin x - 1) = 0$.

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より,

$x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, 2\pi$.

(3) $\sin 3x \geqq a\sin x$ より,

$(-\sin x)a + \sin 3x \geqq 0$.

$f(a) = (-\sin x)a + \sin 3x$ とおくと, $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たすすべての a に対して $f(a) \geqq 0$ が成り立つ条件は,

$f(-1) \geqq 0$ かつ $f(1) \geqq 0$

である.

$f(-1) \geqq 0$ より,

$\sin x + \sin 3x \geqq 0$.

$\sin x + (3\sin x - 4\sin^3 x) \geqq 0$.

$4\sin x(\sin x + 1)(\sin x - 1) \leqq 0$.

$\sin x \leqq -1,\ 0 \leqq x \leqq 1$. …①

$f(1) \geqq 0$ より,

$-\sin x + \sin 3x \geqq 0$.

$-\sin x + (3\sin x - 4\sin^3 x) \geqq 0$.

$2\sin x(\sqrt{2}\sin x + 1)(\sqrt{2}\sin x - 1) \leqq 0$.

$\sin x \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \leqq \sin x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$. …②

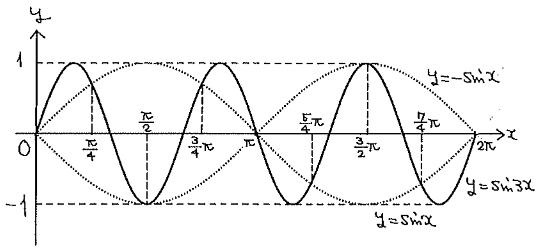
① かつ ② より,

$\sin x = -1,\ 0 \leqq \sin x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より,

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi \leqq x \leqq \pi,\ x = \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi$.

((3)の参考)



© 河合塾 2021年

$\boxed{2}$

(1) $z \neq 0$, $z \neq \pm 1$ より,

$$1 \neq z,\ z \neq z^2,\ z^2 \neq 1$$

である.

3点 $A(1)$, $B(z)$, $C(z^2)$ が一直線上にある条件は,

$$\frac{z^2-1}{z-1} \text{ が実数であること}$$

である.

$$\frac{z^2-1}{z-1} = z+1$$

より, 求める条件は,

z が 0, ± 1 以外の実数.

(2) 3点 $A(1)$, $B(z)$, $C(z^2)$ が $\angle C$ を直角とする直角三角形の3頂点となる条件は,

$$\frac{1-z^2}{z-z^2} \text{ が純虚数であること}$$

である.

$$\frac{1-z^2}{z-z^2} = \frac{(1-z)(1+z)}{z(1-z)} = \frac{1+z}{z}$$

より, $z \neq -1$ であり,

$$\overline{\left(\frac{1+z}{z}\right)} = -\frac{1+z}{z}.$$

$$\frac{1+\bar{z}}{\bar{z}} = -\frac{1+z}{z}.$$

$$z\bar{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z} = 0.$$

$$\left(z+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}.$$

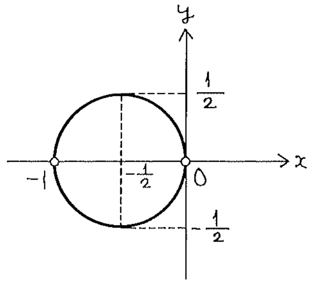
$$\left|z+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

よって, 条件を満たす z 全体の表す図形は,

中心 $-\frac{1}{2}$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円のうち,

2点 0, -1 を除いた部分

であり, 図示すると次図の太線部分.



(3) 3点 $A(1)$, $B(z)$, $C(z)^2$ が直角三角形の3頂点となる条件について,

(i) $\angle C = \frac{\pi}{2}$ となるとき, (2) より,

中心 $-\frac{1}{2}$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円のうち,

2点 -1, 0 を除いた部分.

(ii) $\angle A = \frac{\pi}{2}$ となる条件は,

$$\frac{z^2-1}{z-1} = z+1 \text{ が純虚数であること}$$

より,

$z = -1 + yi$ (y は実数で, $y \neq 0$).

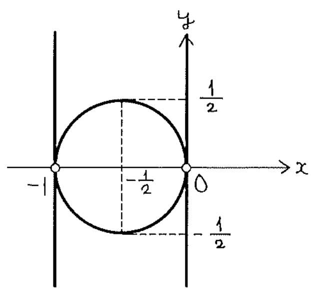
(iii) $\angle B = \frac{\pi}{2}$ となる条件は,

$$\frac{z^2-z}{1-z} = -z \text{ が純虚数であること}$$

より,

$z = yi$ (y は実数で, $y \neq 0$).

(i), (ii), (iii) より, 条件を満たす z 全体の表す図形を図示すると, 次図の太線部分.



© 河合塾 2021年

$\boxed{3}$

(1) n が整数のとき，

$$n^3-n=(n-1)n(n+1)$$

であり，$(n-1)n(n+1)$ は連続する3整数の積なので6の倍数である．

したがって，n を6で割った余りと，n^3 を6で割った余りは等しい．

(2) (1)より，

a^3+b^3 と $a+b$ を6で割った余りは等しい．

整数 a, b, c が条件

$$a^3+b^3+c^3=(c+1)^3 \qquad (*)$$

を満たすとき，

$$a^3+b^3=3c(c+1)+1. \quad \cdots ①$$

$c(c+1)$ は連続する2整数の積なので偶数である．

したがって，$3c(c+1)$ は6の倍数であり，a^3+b^3 を6で割った余りは 1.

よって，

$a+b$ を6で割った余りは 1.

(3) ①より，

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= 3c(c+1)+1 \\ &\leqq 3\cdot 10\cdot 11+1 \\ &= 331 \end{aligned}$$

である．

$n\geqq 7$ のとき，$n^3\geqq 343$

であるから，

$$b\leqq 6$$

である．

したがって，$1\leqq a\leqq b\leqq 6$ であり

$$2\leqq a+b\leqq 12$$

であるから，$(*)$ が成り立つとき，(2)より，

$$a+b=7$$

に限られる．

このとき，

$$(a, b)=(1, 6), (2, 5), (3, 4)$$

のいずれかであり，このうち $(*)$ を満たす c が存在するものは，①より，

$$(a, b)=(1, 6), (3, 4)$$

であり，

$(a, b)=(1, 6)$ のとき，$c=8$,

$(a, b)=(3, 4)$ のとき，$c=5$.

したがって，

$(a, b, c)=(1, 6, 8), (3, 4, 5)$.

© 河合塾 2021年

4

(1) nは正の整数より,

$$f(-t)=f(t)$$

が成り立つので, 2点 $A(-t, f(-t))$, $B(t, f(t))$ $(t>0)$ は, y軸に関して対称である.

よって, 3点 A, O, B を通る円の中心はy軸上にある.

線分OBの垂直二等分線の方程式は,

$$y-\frac{t^{2n}}{2}=-\frac{1}{t^{2n-1}}\left(x-\frac{t}{2}\right),$$

$$y=-\frac{1}{t^{2n-1}}x+\frac{t^{2n}}{2}+\frac{1}{2t^{2n-2}}$$

であるから, y軸との交点は,

$$\left(0,\ \frac{t^{2n}}{2}+\frac{1}{2t^{2n-2}}\right).$$

したがって,

$$p(t)=0,\quad q(t)=r(t)=\frac{t^{2n}}{2}+\frac{1}{2t^{2n-2}}.$$

これより, nの値によらず, $\lim_{t\to+0}p(t)$ は,

$$\lim_{t\to+0}p(t)=0$$

となり収束する.

次に,

$$\lim_{t\to+0}\left(\frac{t^{2n}}{2}+\frac{1}{2t^{2(n-1)}}\right)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (n=1\text{のとき}),\\ \infty & (n\geqq 2\text{のとき})\end{cases}$$

であるから, $\lim_{t\to+0}q(t)$, $\lim_{t\to+0}r(t)$ が収束する条件は,

$$n=1.$$

また, このとき,

$$a=0,\quad b=\frac{1}{2},\quad c=\frac{1}{2}.$$

(2) 中心 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円と, 放物線 $y=x^2$ の共有点について,

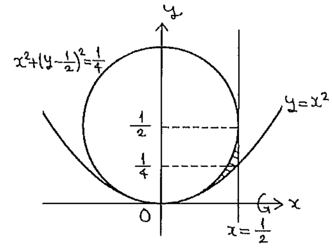
$$\begin{cases}x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},\\ y=x^2\end{cases}$$

より,

$$y+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

$$y=0.$$

よって, 共有点は $(0,0)$ のみである.



円上の点を (x, y_1) $\left(y_1\leqq\frac{1}{2}\right)$, 放物線上の点を (x, y_2) とすると,

$$x^2+\left(y_1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

より,

$$y_1=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$$

であり,

$$V=\int_0^{\frac{1}{2}}\pi y_1^2\,dx-\int_0^{\frac{1}{2}}\pi y_2^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(y_1^2-y_2^2)\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x^2-x^4-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\right)dx$$

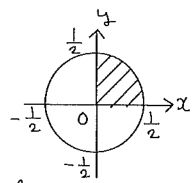
と表せる.

ここで,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x^2-x^4\right)dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{97}{480}$$

であり, $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,dx$ は, 右図の斜線部分の面積に等しいので,



$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\cdot\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{16}.$$

よって,

$$V=\frac{97}{480}\pi-\frac{\pi^2}{16}.$$

© 河合塾 2021年