文学部、教育学部、法学部、経済学部、情報学部（人間・社会情報学科）

$\boxed{1}$ $C_1 : y = x^2$,　$C_2 : y = -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a^4$

(1) C_1 について，$y' = 2x$.

C_1 上の点 (t, t^2) における C_1 の接線の方程式は

$$y = 2t(x - t) + t^2$$

すなわち，$y = 2tx - t^2$　…①　…(答)

(2) 直線①が C_2 に接するとき，x の2次方程式

$$2tx - t^2 = -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a^4$$

すなわち，

$$x^2 + (2t - 4a)x + 4a^2 - 4a^4 - t^2 = 0 \quad \cdots ②$$

は重解を持つ．②の判別式を D_1 とすると，

$$\frac{D_1}{4} = (t - 2a)^2 - (4a^2 - 4a^4 - t^2)$$

$$= 2(t^2 - 2at + 2a^4).$$

$D_1 = 0$ より，$t^2 - 2at + 2a^4 = 0$　…③

③が異なる2つの実数解を持つような

a の範囲を求めればよい．

③の判別式を D_2 とすると，

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - 2a^4 = a^2(1 - 2a^2)$$

$D_2 > 0$ より，$a^2(1 - 2a^2) > 0$.

解いて，$-\frac{1}{\sqrt{2}} < a < 0$，$0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

これと $a > 0$ より，$0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$.　…(答)

(3) ③の2解を t_1，t_2 $(t_1 < t_2)$ とする．

解と係数の関係より

$$t_1 + t_2 = 2a, \quad t_1 t_2 = 2a^4. \quad \cdots ④$$

このとき，2接線 l，l' の方程式は

$l : y = 2t_1 x - t_1^2$,

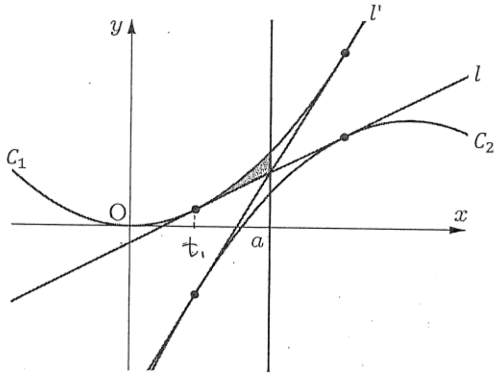
$l' : y = 2t_2 x - t_2^2$.

2式を連立して，$x = \frac{t_1 + t_2}{2}$，$y = t_1 t_2$.

これと④より，$x = a$，$y = 2a^4$.

よって，求める交点の座標は $(a, 2a^4)$.　…(答)

(4)



D_1 と D_2 の共通部分は図の影の部分．よって，

$$S(a) = \int_{t_1}^{a} \{x^2 - (2t_1 x - t_1^2)\} dx$$

$$= \int_{t_1}^{a} (x - t_1)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x - t_1)^3\right]_{t_1}^{a}$$

$$= \frac{1}{3}(a - t_1)^3$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{t_1 + t_2}{2} - t_1\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right)^3.$$

ここで，③を解いて，

$$t = a \pm \sqrt{a^2 - 2a^4}.$$

$t_2 > t_1$ より

$$\frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{2\sqrt{a^2 - 2a^4}}{2} = \sqrt{a^2 - 2a^4}$$

よって，$S(a) = \frac{1}{3}(a^2 - 2a^4)^{\frac{3}{2}}$.　…(答)

文学部、教育学部、法学部、経済学部、情報学部（人間・社会情報学科）

2

(1) 底の変換公式を用いて，

$$\alpha\beta\gamma = \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2$$

$$= \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 5}$$

$$= 1 .$$ （証明終り）

(2) $\gamma = \log_5 2 < \log_5 5 = 1$，

$\beta = \log_3 5 > \log_3 3 = 1$ より

$\gamma < 1 < \beta$． $\cdots$①

$$\alpha - \delta = \log_2 3 - \log_2 2^{\frac{3}{2}}$$

$$= \log_2 \sqrt{9} - \log_2 \sqrt{8} > 0,$$

$$\beta - \delta = \log_3 5 - \log_3 3^{\frac{3}{2}}$$

$$= \log_3 \sqrt{25} - \log_3 \sqrt{27} < 0$$ より

$\beta < \delta = \frac{3}{2} < \alpha$． $\cdots$②

①，②より，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は小さい順に

$\gamma, \beta, \delta, \alpha$． $\cdots$（答）

(3) $p = \alpha + \beta + \gamma$，

$q = \dfrac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ ((1)より)，

これと(1)より，α, β, γ は3次方程式

$$x^3 - px^2 + qx - 1 = 0$$

の解である．

$g(x) = x^3 - px^2 + qx - 1$ とおくと，

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$$

$$= -(-x^3 - px^2 - qx - 1)$$

$$= -g(-x) \quad \cdots (※)$$

と表せる．

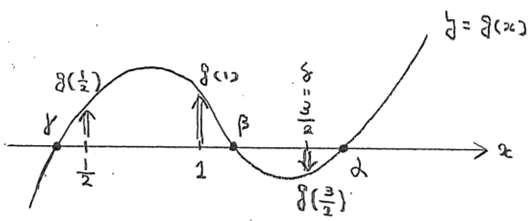
ここで，

$$\gamma - \frac{1}{2} = \log_5 2 - \log_5 5^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_5 \sqrt{4} - \log_5 \sqrt{5} < 0$$ より

$\gamma < \frac{1}{2}$．

これと(2)より，$y = g(x)$ のグラフは次図．



グラフより，

$g(\frac{1}{2}) > 0$，$g(1) > 0$，$g(\frac{3}{2}) < 0$

であるから，(※)より

$$\begin{cases} f(-\frac{1}{2}) = -g(\frac{1}{2}) < 0, \\ f(-1) = -g(1) < 0, \\ f(-\frac{3}{2}) = -g(\frac{3}{2}) > 0. \end{cases} \quad \cdots \text{（答）}$$

文学部、教育学部、法学部、経済学部、情報学部（人間・社会情報学科）

3

(1) ゲーム終了時に，2が丸で囲まれているのは

- (a)の操作で2を選ぶとき
- (a)で1を選び，(b)で2を選ぶとき

のいずれかであるから，

$$P_2 = \frac{1}{12} + P_1 \times \frac{1}{7} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{21}.$$

…(答)

(2) ゲーム終了時に，3が丸で囲まれているのは

- (a)の操作で3を選ぶとき
- (b)で3を選ぶ1つ前の操作で1または2を選ぶとき

のいずれかであるから，

$$P_3 = \frac{1}{12} + P_1 \times \frac{1}{7} + P_2 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{35}.$$

以下，同様に考えて，

$$P_4 = \frac{1}{12} + P_1 \times \frac{1}{7} + P_2 \times \frac{1}{5} + P_3 \times \frac{1}{3} = \frac{16}{105}$$

であるから，

$$P_5 = \frac{1}{12} + P_1 \times \frac{1}{7} + P_2 \times \frac{1}{5} + P_3 \times \frac{1}{3} + P_4 \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{8}{35}.$$

…(答)

(3) $P_6 = \frac{1}{12} + P_1 \times \frac{1}{7} = P_2$，

$$P_{10} = \frac{1}{12} + P_1 \times \frac{1}{7} + P_6 \times \frac{1}{5} = P_3$$

であり，

$$P_7 = \frac{1}{12} + P_2 \times \frac{1}{5} + P_6 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}P_2 + \frac{1}{12} = \frac{17}{140}$$

であるから，

$$P_{11} = \frac{1}{12} + P_2 \times \frac{1}{5} + P_7 \times \frac{1}{3} + P_{10} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{12} + P_2 \times \frac{1}{5} + P_3 \times \frac{1}{2} + P_7 \times \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{5}.$$

…(答)