理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

1 $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a^4$

(1) C_1 について、$y' = 2x$.

C_1 上の点 (t, t^2) における C_1 の接線の方程式は

$$y = 2t(x - t) + t^2$$

すなわち、$y = 2tx - t^2$. …① …(答)

(2) 直線①が C_2 に接するとき、x の2次方程式

$$2tx - t^2 = -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a^4$$

すなわち、

$$x^2 + (2t - 4a)x + 4a^2 - 4a^4 - t^2 = 0 \quad \cdots ②$$

は重解を持つ。②の判別式を D_1 とすると、

$$D_1/4 = (t - 2a)^2 - (4a^2 - 4a^4 - t^2)$$

$$= 2(t^2 - 2at + 2a^4).$$

$D_1 = 0$ より、$t^2 - 2at + 2a^4 = 0$ …③

③が異なる2つの実数解を持つような

a の範囲をもとめればよい。

③の判別式を D_2 とすると、

$$D_2/4 = a^2 - 2a^4 = a^2(1 - 2a^2)$$

$D_2 > 0$ より、$a^2(1 - 2a^2) > 0$.

解いて、$-\frac{1}{\sqrt{2}} < a < 0$, $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

これと $a > 0$ より、$0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$. …(答)

(3) ③の2解を t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ とする。

解と係数の関係より

$$t_1 + t_2 = 2a, \quad t_1 t_2 = 2a^4. \quad \cdots ④$$

このとき、2接線 l, l' の方程式は

$l : y = 2t_1 x - t_1^2$,

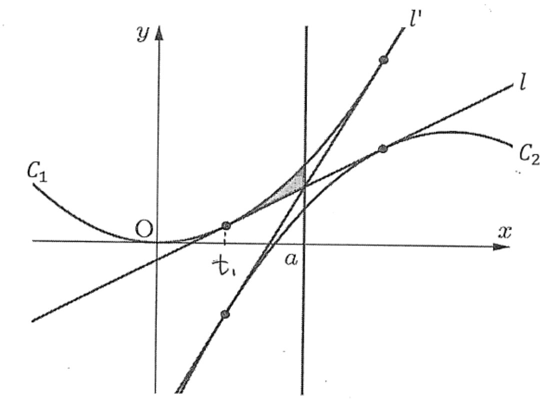
$l' : y = 2t_2 x - t_2^2$.

2式を連立して、$x = \frac{t_1 + t_2}{2}$, $y = t_1 t_2$.

これと④より、$x = a$, $y = 2a^4$.

よって、もとめる交点の座標は $(a, 2a^4)$. …(答)

(4)



D_1 と D_2 の共通部分は図の影の部分。よって、

$$S(a) = \int_{t_1}^{a} \{x^2 - (2t_1 x - t_1^2)\} dx$$

$$= \int_{t_1}^{a} (x - t_1)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x - t_1)^3\right]_{t_1}^{a}$$

$$= \frac{1}{3}(a - t_1)^3$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{t_1 + t_2}{2} - t_1\right)^3 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right)^3.$$

ここで、③を解いて、

$$t = a \pm \sqrt{a^2 - 2a^4}.$$

$t_2 > t_1$ より

$$\frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{2\sqrt{a^2 - 2a^4}}{2} = \sqrt{a^2 - 2a^4}$$

よって、$S(a) = \frac{1}{3}(a^2 - 2a^4)^{\frac{3}{2}}$. …(答)

(5) (4)の結果より

$$S(a) = \frac{1}{3}\left\{-2\left(a^2 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

(2)の結果より $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから、$0 < a^2 < \frac{1}{2}$.

よって、$S(a)$ が最大となるのは、$a^2 = \frac{1}{4}$ すなわち $a = \frac{1}{2}$

のときで、最大値は

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{48\sqrt{2}}. \quad \cdots (答)$$

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

2

(1) 底の変換公式を用いて,

$$\alpha\beta\gamma = \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2$$
$$= \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 5}$$
$$= 1 .$$ （証明終り）

(2) $\gamma = \log_5 2 < \log_5 5 = 1$,

$\beta = \log_3 5 > \log_3 3 = 1$ より

$$\gamma < 1 < \beta . \quad \cdots ①$$

$$\alpha - \delta = \log_2 3 - \log_2 2^{\frac{3}{2}}$$
$$= \log_2 \sqrt{9} - \log_2 \sqrt{8} > 0,$$

$$\beta - \delta = \log_3 5 - \log_3 3^{\frac{3}{2}}$$
$$= \log_3 \sqrt{25} - \log_3 \sqrt{27} < 0$$ より

$$\beta < \delta = \frac{3}{2} < \alpha . \quad \cdots ②$$

①, ② より, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は小さい順に

$\gamma, \beta, \delta, \alpha$. …（答）

(3) $p = \alpha + \beta + \gamma$,

$$q = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \ \text{((1)より)},$$

これと (1) より, α, β, γ は 3 次方程式

$$x^3 - px^2 + qx - 1 = 0$$

の解である.

$g(x) = x^3 - px^2 + qx - 1$ とおくと,

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$$
$$= -(-x^3 - px^2 - qx - 1)$$
$$= -g(-x) \quad \cdots ☆$$

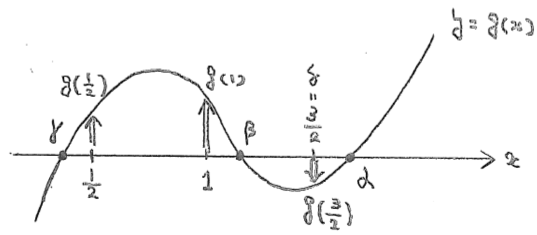
と表せる.

ここで,

$$\gamma - \frac{1}{2} = \log_5 2 - \log_5 5^{\frac{1}{2}}$$
$$= \log_5 \sqrt{4} - \log_5 \sqrt{5} < 0$$ より

$$\gamma < \frac{1}{2} .$$

これと (2) より, $y = g(x)$ のグラフは次図.



グラフより,

$$g\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \ g(1) > 0, \ g\left(\tfrac{3}{2}\right) < 0$$

であるから, ☆ より

$$\begin{cases} f\left(-\frac{1}{2}\right) = -g\left(\frac{1}{2}\right) < 0, \\ f(-1) = -g(1) < 0, \\ f\left(-\frac{3}{2}\right) = -g\left(\frac{3}{2}\right) > 0 . \end{cases} \quad \cdots \text{(答)}$$

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

3

(1) ゲーム終了時に，2が丸で囲まれているのは

- (a)の操作で2を選ぶとき
- (a)で1を選び，(b)で2を選ぶとき

のいずれかであるから，

$$P_2=\frac{1}{12}+P_1\times\frac{1}{7}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{7}=\frac{2}{21}.$$

…(答)

(2) ゲーム終了時に，3が丸で囲まれているのは

- (a)の操作で3を選ぶとき
- (b)で3を選ぶ1つ前の操作で1または2を選ぶとき

のいずれかであるから，

$$P_3=\frac{1}{12}+P_1\times\frac{1}{7}+P_2\times\frac{1}{5}=\frac{4}{35}.$$

以下，同様に考えて，

$$P_4=\frac{1}{12}+P_1\times\frac{1}{7}+P_2\times\frac{1}{5}+P_3\times\frac{1}{3}=\frac{16}{105}$$

であるから，

$$P_5=\frac{1}{12}+P_1\times\frac{1}{7}+P_2\times\frac{1}{5}+P_3\times\frac{1}{3}+P_4\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{8}{35}.\quad\cdots(答)$$

$$P_6=\frac{1}{12}+P_1\times\frac{1}{7}=P_2,$$
$$P_{10}=\frac{1}{12}+P_1\times\frac{1}{7}+P_6\times\frac{1}{5}=P_3$$

であり，

$$P_7=\frac{1}{12}+P_2\times\frac{1}{5}+P_6\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}P_2+\frac{1}{12}=\frac{17}{140}$$

であるから，

$$P_{11}=\frac{1}{12}+P_2\times\frac{1}{5}+P_7\times\frac{1}{3}+P_{10}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{12}+P_2\times\frac{1}{5}+P_3\times\frac{1}{2}+P_7\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{5}.\quad\cdots(答)$$

(3) (2)と同様に考えて

$$P_{12}=\frac{1}{12}+P_1\times\frac{1}{7}+P_6\times\frac{1}{5}+P_{10}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{12}+P_1\times\frac{1}{7}+P_2\times\frac{1}{5}+P_3\times\frac{1}{2}$$
$$=P_3+\frac{1}{2}P_3$$
$$=\frac{6}{35}.$$

また，

$$P_9=1-(P_5+P_{11}+P_{12})$$
$$=1-\left(\frac{8}{35}+\frac{1}{5}+\frac{6}{35}\right)$$
$$=\frac{2}{5}$$

である。

$$\frac{2}{5}>\frac{8}{35}>\frac{1}{5}>\frac{6}{35}$$

より，P_5, P_9, P_{11}, P_{12} のうち最も大きいものの値は

$$\frac{2}{5}.\quad\cdots(答)$$

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

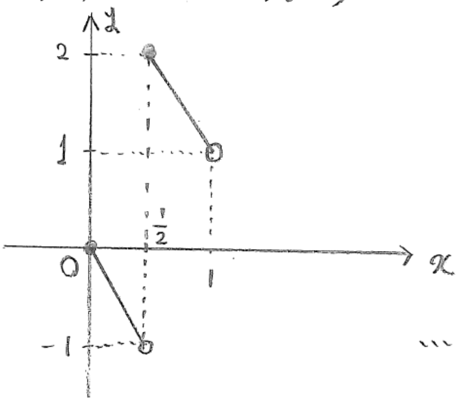
$\boxed{4}$ (1) $a_2 = 3\left[a+\frac{1}{2}\right] - 2a$

$$= \begin{cases} -2a & \left(0 \leqq a < \frac{1}{2}\right), \\ -2a+3 & \left(\frac{1}{2} \leqq a < 1\right). \end{cases}$$

したがって，軌跡の方程式は，

$$y = \begin{cases} -2x & \left(0 \leqq x < \frac{1}{2}\right), \\ -2x+3 & \left(\frac{1}{2} \leqq x < 1\right). \end{cases}$$

よって，これを図示すると，



…(答)

(2) $a_n - [a_n] \geqq \frac{1}{2}$ より，$a_n + \frac{1}{2} \geqq [a_n] + 1$.

したがって，$\left[a_n + \frac{1}{2}\right] \geqq [a_n] + 1$ より，

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 3\left[a_n + \frac{1}{2}\right] - 3a_n \\ &\geqq 3([a_n]+1) - 3a_n \\ &= 3(1 + [a_n] - a_n) \\ &> 0 \end{aligned}$$

よって，

$a_n < a_{n+1}$.　(証明終り)

(3) $a_n - [a_n] \geqq \frac{1}{2} \Rightarrow a_n < a_{n+1}$　…(*)

(*)の対偶を考えると，

$a_n \geqq a_{n+1} \Rightarrow a_n - [a_n] < \frac{1}{2}$　…(**)

$a_n > a_{n+1}$ のとき，(**)より，

$[a_n] \leqq a_n < [a_n] + \frac{1}{2}$.　…①

$[a_n] + \frac{1}{2} \leqq a_n + \frac{1}{2} < [a_n] + 1$.

よって，$\left[a_n + \frac{1}{2}\right] = [a_n]$.

$a_{n+1} = 3\left[a_n + \frac{1}{2}\right] - 2a_n$ より，

$a_{n+1} = 3[a_n] - 2a_n$.　…②

$a_n = [a_n]$ のとき，②より，

$a_{n+1} = 3a_n - 2a_n = a_n$ となり，

$a_n > a_{n+1}$ に反する。

よって，$a_n \neq [a_n]$.

これと①より，

$[a_n] < a_n < [a_n] + \frac{1}{2}$.

$[a_n] - 1 < 3[a_n] - 2a_n < [a_n]$.

$[a_n] - 1 < a_{n+1} < [a_n]$.

ゆえに，$[a_{n+1}] = [a_n] - 1$.

よって，$a_{n+1} = 3[a_n] - 2a_n$ かつ $[a_{n+1}] = [a_n] - 1$ は成り立つ。

(証明終り)

(4) $1 \leqq n \leqq k-1$ を満たす自然数 n に対して，$a_n > a_{n+1}$ が成り立つので，

(3)より，$\begin{cases} a_{n+1} = 3[a_n] - 2a_n, & \cdots③ \\ [a_{n+1}] = [a_n] - 1. & \cdots④ \end{cases}$

$(n = 1, 2, \cdots, k-1)$

④より，$[a_n] = [a_1] + (n-1)\cdot(-1)$　$(n = 1, 2, \cdots, k)$

$0 \leqq a < 1$ より，$[a_1] = [a] = 0$ であるから，

$[a_n] = -n + 1$.　…⑤

$(n = 1, 2, \cdots, k)$

③,⑤より，$a_{n+1} = -2a_n - 3n + 3$.　$(n = 1, 2, \cdots, k-1)$

$a_{n+1} + (n+1) - \frac{4}{3} = -2\left(a_n + n - \frac{4}{3}\right)$.

$a_n + n - \frac{4}{3} = \left(a_1 + 1 - \frac{4}{3}\right)(-2)^{n-1}$　$(n = 1, 2, \cdots, k)$

$$a_n = \left(a - \frac{1}{3}\right)(-2)^{n-1} - n + \frac{4}{3}.$$

よって，

$$a_k = \left(a - \frac{1}{3}\right)(-2)^{k-1} - k + \frac{4}{3}.\ \cdots(答)$$