数学 数学Ⅰ，数学A 数学Ⅱ，数学B 数学Ⅲ

令和３年度入学試験問題

受験番号

解答紙

（工　学　部）

（５枚のうち１枚目）

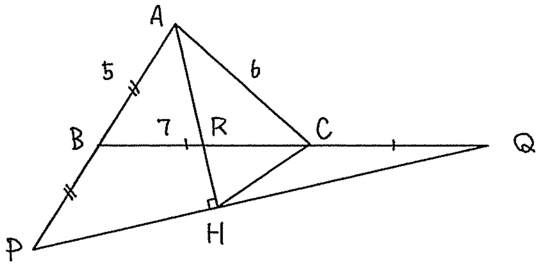
受験番号

60

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔１〕（30点）　三角形ABCの辺AB, BC, ACの長さを ……

〔１〕の採点



(1) $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AB}|^2$

$|\overrightarrow{AB}|=5$、$|\overrightarrow{AC}|=6$、$|\overrightarrow{BC}|=7$ より $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$

Rは線分BC上の点であるから，$\overrightarrow{AR}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$ $(0<s<1)$ とおける

ここで，$\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{BC}$ より $\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ であり

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}$$
$$=-3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{AR}\perp\overrightarrow{PQ}$ より，$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$ であるから

$$\{(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}\}\cdot(-3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})=0$$
$$-3(1-s)|\overrightarrow{AB}|^2+2(1-s)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-3s\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2s|\overrightarrow{AC}|^2=0$$

これより，$s=\frac{7}{13}$ $(0<s<1$ をみたす$)$ であるから，$BR:RC=7:6$ …(答)

(2) (1)より，$\overrightarrow{AR}=\frac{6}{13}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{13}\overrightarrow{AC}$

Hは直線AR上の点であるから，$\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AR}$ (tは実数) とおけて，

$$\overrightarrow{AH}=\frac{6}{13}t\overrightarrow{AB}+\frac{7}{13}t\overrightarrow{AC}\ -①$$

また，Hは線分PQ上の点であるから，$\overrightarrow{AH}=(1-u)\overrightarrow{AP}+u\overrightarrow{AQ}$ $(0<u<1)$ とおけて．

$$\overrightarrow{AH}=(2-3u)\overrightarrow{AB}+2u\overrightarrow{AC}\ -②$$

$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ は１次独立であるから，①，②より

$$\begin{cases}\frac{6}{13}t=2-3u.\\ \frac{7}{13}t=2u.\end{cases}$$

これより，$t=\frac{52}{33}$，$u=\frac{14}{33}$ $(0<u<1$ をみたす$)$ であるから，$AR:RH=33:19$ …(答)

(3) まず，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{5^2\cdot6^2-6^2}=6\sqrt{6}$$

(1)，(2)より，

$$\triangle ARC=\frac{6}{13}\triangle ABC.$$

$$\triangle RHC=\frac{19}{33}\triangle ARC$$

であるから，

$$\triangle RHC=\frac{19}{33}\times\frac{6}{13}\triangle ABC$$
$$=\frac{228\sqrt{6}}{143}\ \cdots(答)$$

(1) 採点

(2) 採点

(3) 採点

〔２〕（30点）Mを２以上の自然数，pを実数……

〔２〕の採点

(1) $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=\dfrac{3n+p}{27M^3}$ より，$a_{n+2}-a_{n+1}-(a_{n+1}-a_n)=\dfrac{3n+p}{27M^3}$. …①

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_1=a_2-a_1=0$ であり，①より $b_{n+1}-b_n=\dfrac{3n+p}{27M^3}$

となるから，$n\geqq 2$ のとき，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3k+p}{27M^3}=\frac{1}{27M^3}\left\{3\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+(n-1)p\right\}=\frac{1}{54M^3}(n-1)(3n+2p).$$

$b_1=0$ より，$n=1$ のときも成り立つので，

$$b_n=\frac{1}{54M^3}(n-1)(3n+2p).\quad(n=1,2,\cdots,3M-1).\quad\cdots(答)$$

(2) (1)より，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{54M^3}(n-1)(3n+2p)=\dfrac{1}{54M^3}\left\{3n^2+(2p-3)n-2p\right\}$ であるから，

$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{54M^3}\left\{3k^2+(2p-3)k-2p\right\}$$

$$=\frac{1}{54M^3}\left\{3\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+(2p-3)\cdot\frac{1}{2}n(n-1)-2p\cdot(n-1)\right\}$$

$$=\frac{1}{54M^3}(n-1)(n-2)(n+p).$$

$a_1=0$ より，$n=1$ のときも成り立つので，

$$a_n=\frac{1}{54M^3}(n-1)(n-2)(n+p).\quad(n=1,2,\cdots,3M).\quad\cdots(答)$$

また，$a_{3M}=\dfrac{1}{54M^3}(3M-1)(3M-2)(3M+p)$ であり，Mは２以上の自然数であるから，

$a_{3M}=0$ のとき，$3M+p=0$ すなわち $p=-3M$ より，$p_M=-3M$. …(答)

(3) $p=-3M$ のとき，(1)より $b_n=a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{18M^3}(n-1)(n-2M)$. …②

(1)採点

②より，$b_n>0$ すなわち $a_{n+1}>a_n$ となるとき，$n=2M+1,2M+2,\cdots,3M-1$.

$b_n=0$ すなわち $a_{n+1}=a_n$ となるとき，$n=1,\ 2M$.

$b_n<0$ すなわち $a_{n+1}<a_n$ となるとき，$n=2,3,\cdots,2M-1$.

であるから，

(2)採点

$$a_1=a_2>a_3>a_4>\cdots>a_{2M-1}>a_{2M}=a_{2M+1}<a_{2M+2}<a_{2M+3}<\cdots<a_{3M}.$$

よって，数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{3M}$ の中で最小の項は，a_{2M}，a_{2M+1} である．

したがって，$a_n=c_M$ となる n は，$n=2M,\ 2M+1$. …(答)

また，(2)および $p=-3M$ より，

(3)採点

$$c_M=a_{2M}=a_{2M+1}=\frac{1}{54M^3}(2M-1)(2M-2)(2M-3M)$$

$$=-\frac{\left(2-\frac{1}{M}\right)\left(1-\frac{1}{M}\right)}{27}\longrightarrow-\frac{2}{27}.\quad(M\to\infty).$$

よって，

$$\lim_{M\to\infty}c_M=-\frac{2}{27}.\quad\cdots(答)$$

62

数学 数学Ⅰ，数学Ａ 数学Ⅱ，数学Ｂ 数学Ⅲ

令和３年度入学試験問題

受 験 番 号

受 験 番 号

解 答 紙

（５枚のうち３枚目）

（工 学 部）

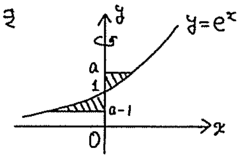
62

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

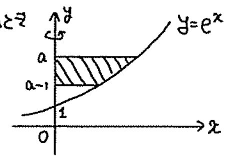
〔３〕（30 点） 実数 a は $a>1$ とする。曲線 $y=e^x$ と ……

〔３〕の採点

(1) ・$1<a<2$ のとき



・$a \geqq 2$ のとき



いずれの場合も，$V(a)=\int_{a-1}^{a}\pi x^2 dy=\pi\int_{a-1}^{a}(\log y)^2 dy$ …①

ここで，$\int(\log y)^2 dy = y(\log y)^2-\int y\cdot 2(\log y)\cdot\frac{1}{y}dy$

$=y\left((\log y)^2-2\log y+2\right)+C$ （C：積分定数）であるから，

$V(a)=\pi\left\{a\left((\log a)^2-2\log a+2\right)-(a-1)\left((\log(a-1))^2-2\log(a-1)+2\right)\right\}$ …(答)

(2) $a>1$ のとき，①より，

$V'(a)=\pi\left\{(\log a)^2-(\log(a-1))^2\right\}=\pi\left\{\log a(a-1)\right\}\left\{\log a-\log(a-1)\right\}$

$\log a-\log(a-1)>0$ である．また，$a>1$ かつ $a(a-1)=1$ をみたす a は，

$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であるから，$a>1$ における $V(a)$ の増減は次のとおり．

a	1	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$
$V'(a)$		$-$	0	$+$
$V(a)$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，$V(a)$ を最小にする a の値は，$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ …(答)

(3) $V(a)$ は $a>2$ において連続で微分可能であるから，平均値の定理より，

$V(a)-V(a-1)=\frac{V(a)-V(a-1)}{a-(a-1)}=V'(b)=\pi\left\{(\log b)^2-(\log(b-1))^2\right\}$ …②

をみたす b（$1<a-1<b<a$）が少なくとも1つ存在する．

$f(x)=(\log x)^2$ とすると，$f(x)$ は $x>0$ において連続で微分可能で

あるから，平均値の定理より

$(\log b)^2-(\log(b-1))^2=\frac{f(b)-f(b-1)}{b-(b-1)}=f'(c)=\frac{2\log c}{c}$ …③

をみたす c（$0<b-1<c<b$）が少なくとも1つ存在する．

$b\to\infty$ のとき，$c\to\infty$ であり，$\lim_{c\to\infty}\frac{2\log c}{c}=0$ であることを用いると，③より

$\lim_{b\to\infty}\left\{(\log b)^2-(\log(b-1))^2\right\}=0$ …④

$a\to\infty$ のとき，$b\to\infty$ であり，④を用いると，②より，

$\lim_{a\to\infty}\left\{V(a)-V(a-1)\right\}=0$ …(答)

(1) 採点

(2) 採点

(3) 採点

63

数学 数学Ⅰ，数学A 数学Ⅱ，数学B 数学Ⅲ

令和３年度入学試験問題

（工　学　部）

解　答　紙

（５枚のうち４枚目）

受験番号

受験番号

63

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔４〕（30点）　正四面体ABCDの頂点A, B, C, D上の動点Pが……

〔４〕の採点

(1) 条件より，

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}(b_n+c_n+d_n)$

ここで，$b_n+c_n+d_n=1-a_n$ なので，

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}(1-a_n)$

$a_{n+1}-\frac{2}{5}=\frac{1}{6}\left(a_n-\frac{2}{5}\right)$

よって，数列 $\left\{a_n-\frac{2}{5}\right\}$ は初項 $a_0-\frac{2}{5}=-\frac{2}{5}$，公比 $\frac{1}{6}$ の等比数列であるから，

$a_n-\frac{2}{5}=-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$a_n=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$ …（答）

(2) 条件より，

$$\begin{cases} b_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{3}d_n & \cdots① \\ c_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n & \cdots② \\ d_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{3}c_n+\frac{1}{3}d_n & \cdots③ \end{cases}$$

①−②より，$b_{n+1}-c_{n+1}=-\frac{1}{3}(c_n-d_n)$

②−③より，$c_{n+1}-d_{n+1}=\frac{1}{3}(b_n-d_n)$

①−③より，$b_{n+1}-d_{n+1}=\frac{1}{3}(b_n-c_n)$

よって，

$b_{n+3}-c_{n+3}=-\frac{1}{3}(c_{n+2}-d_{n+2})=-\frac{1}{9}(b_{n+1}-d_{n+1})=-\frac{1}{27}(b_n-c_n)$

k を0以上の整数とすると，数列 $\{b_{3k}-c_{3k}\}$ は初項 $b_0-c_0=1$，公比 $-\frac{1}{27}$ の等比数列であるから，

$b_{3k}-c_{3k}=\left(-\frac{1}{27}\right)^k=\left(-\frac{1}{3}\right)^{3k}$

すなわち，n が3の倍数のとき，

$b_n-c_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ …（答）

同様に $c_{n+3}-d_{n+3}=-\frac{1}{27}(c_n-d_n)$ であり，$c_0-d_0=0$ であるから，

n が3の倍数のとき，

$c_n-d_n=0$ …（答）

(3) n が3の倍数のとき，(1)，(2)より，

$a_n=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$，$b_n=c_n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\cdots④$，$d_n=c_n\cdots⑤$

これらを $a_n+b_n+c_n+d_n=1$ に代入すると，

$3c_n+\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n=1$

$c_n=\frac{1}{5}+\frac{2}{15}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ …（答）

また，これと④，⑤より，n が3の倍数のとき，

$b_n=\frac{1}{5}+\frac{2}{15}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ …（答）

$d_n=\frac{1}{5}+\frac{2}{15}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ …（答）

(1) 採点

(2) 採点

(3) 採点

64	**数学** 数学Ⅰ、数学A 数学Ⅱ、数学B 数学Ⅲ	令和3年度入学試験問題	受験番号	受験番号

(工 学 部)

解 答 紙

(5枚のうち5枚目)

64

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔5〕 (30点) $f(x)$ を次の条件を満たす3次の多項式とする。……

〔5〕の採点

(a) x^3 の係数は1である。 $\begin{cases} (b)_1 & \omega \neq 0, \pm 1 \\ (b)_2 & f(\omega^n) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$

(1) $\omega = \omega^2$ とすると $\omega = 0, 1$ となり $(b)_1$ に反する。よって、$\omega \neq \omega^2$

同様に $\omega \neq \omega^3$, $\omega^2 \neq \omega^3$ である。

したがって、$\omega, \omega^2, \omega^3$ は互いに異なり $(b)_2$ よりこれらは

3次方程式

$$f(x) = 0$$

の3解である。

$(b)_2$ より $f(\omega^4) = 0$ したがって、ω^4 は $\omega, \omega^2, \omega^3$ のいずれかに一致する。

$\omega^4 = \omega$ のとき $\omega(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$ $(b)_1$ より $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

よって

$$\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$\omega^4 = \omega^2$ のとき $\omega^2(\omega + 1)(\omega - 1) = 0$ これは $(b)_1$ に反する。

$\omega^4 = \omega^3$ のとき $\omega^3(\omega - 1) = 0$ これは $(b)_1$ に反する。

以上より

$$\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \cdots (答)$$

(2) (1) より $\omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots ①$, $\omega^3 = 1 \cdots ②$

よって

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 1)(x - \omega)(x - \omega^2) \\ &= (x - 1)\{x^2 - (\omega + \omega^2)x + \omega^3\} \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1 \end{aligned}$$

このとき $f(\omega^n) = (\omega^n)^3 - 1 = (\omega^3)^n - 1 = 0$ となり $(b)_2$ を満たす。$f(x) = x^3 - 1 \cdots (答)$

(1) 採点

(3) $g(1) = 1 + 1 + \cdots + 1 = 2022$

$$g(\omega) = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{2021} = \frac{1 - \omega^{2022}}{1 - \omega} = \frac{1 - (\omega^3)^{674}}{1 - \omega} = 0$$

$$g(\omega^2) = 1 + \omega^2 + \omega^4 + \cdots + \omega^{4042} = \frac{1 - (\omega^2)^{2022}}{1 - \omega^2} = \frac{1 - (\omega^3)^{1348}}{1 - \omega^2} = 0$$

$g(x)$ を $f(x)$ で割ったときの商を $h(x)$、余りを $ax^2 + bx + c$

とすると

$$g(x) = f(x)h(x) + ax^2 + bx + c$$

(2) 採点

したがって $g(1) = a + b + c$, $g(\omega) = a\omega^2 + b\omega + c$

$g(\omega^2) = a\omega + b\omega^2 + c$

よって、

$a + b + c = 2022 \cdots ③$, $a\omega^2 + b\omega + c = 0 \cdots ④$, $a\omega + b\omega^2 + c = 0 \cdots ⑤$

③+④+⑤ と①より $3c = 2022$ $c = 674$ ③より $a + b = 1348$

④−⑤ より $(a - b)(\omega^2 - \omega) = 0$ $(b)_1$ より $a = b$ よって $a = b = 674$

(3) 採点

以上より求める余りは $674x^2 + 674x + 674 \cdots (答)$