数学 数学Ⅰ, 数学A 数学Ⅱ, 数学B

令和3年度入学試験問題

解答紙

（4枚のうち1枚目）

受	験	番	号

受	験	番	号

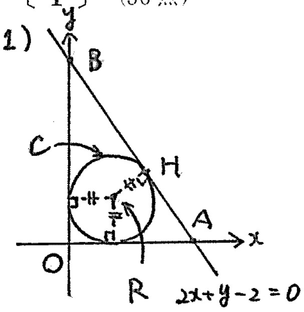
11

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔1〕 (50点)

〔1〕の採点

(1)



直線AB: $2x+y-2=0$

題意の円をCとし，半径を$r\,(>0)$とおくと，条件より，

Cの中心をRとして，$R(r, r)$とおける。

このとき，Rから直線ABに下ろした垂線の足をHとおくと，

$$RH=\frac{|2r+r-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|3r-2|}{\sqrt{5}} \quad \cdots①$$

よって，Cと直線ABが接することから，

$$RH=r \quad \text{すなわち} \quad \frac{|3r-2|}{\sqrt{5}}=r$$

これより，

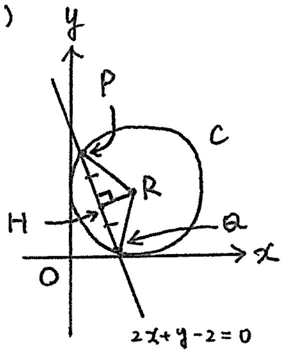
$$r^2-3r+1=0$$
$$r=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

Rが直線ABより下側にあることから，$r=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

したがって，求める中心の座標は，

$$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \quad \cdots(答)$$

(2)



(1)より，rのとり得る値の範囲は，

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<r<\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \cdots②$$

このとき，図のように，Hについて，

$$PH=QH \quad \text{かつ} \quad RH\perp PQ$$

直角三角形RPHにおいて，$PR=r$より，

$$\begin{aligned}PH^2&=PR^2-RH^2\\&=r^2-\left(\frac{|3r-2|}{\sqrt{5}}\right)^2 \quad (①より)\\&=-\frac{4}{5}r^2+\frac{12}{5}r-\frac{4}{5}\\&=-\frac{4}{5}\left(r-\frac{3}{2}\right)^2+1\end{aligned}$$

よって，②において，線分PHの最大値は$r=\frac{3}{2}$のとき 1

したがって，$PQ=2PH$より，線分PQの長さの最大値は，

$$2 \quad \cdots(答)$$

(1) 採点

(2) 採点

解 答 紙

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔２〕（50点）

〔２〕の採点

(1)　$y \geqq xt - 2t^2$ すなわち $2t^2 - xt + y \geqq 0$

であるから，$f(t) = 2t^2 - xt + y$ とすると，すべての実数 t に対して $f(t) \geqq 0$

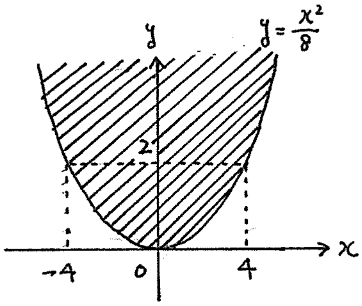
が成立すればよく，その条件は

$$f\left(\frac{x}{4}\right) = -\frac{x^2}{8} + y \geqq 0$$

これより　$y \geqq \dfrac{x^2}{8}$

よって，求める点 (x, y) 全体の集合は

右図の境界を含む斜線部分となる．



(2)　$-1 \leqq t \leqq 1$ をみたすすべての実数 t に対して $f(t) \geqq 0$ が成立すればよく，

その条件は

(i)　$\dfrac{x}{4} < -1$ すなわち $x < -4$ のとき

$$f(-1) = 2 + x + y \geqq 0$$

これより　$y \geqq -x - 2$

(ii)　$-1 \leqq \dfrac{x}{4} \leqq 1$ すなわち $-4 \leqq x \leqq 4$ のとき

$$f\left(\frac{x}{4}\right) = -\frac{x^2}{8} + y \geqq 0$$

これより　$y \geqq \dfrac{x^2}{8}$

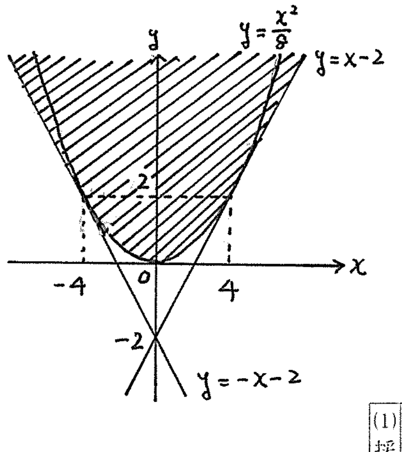
(iii)　$1 < \dfrac{x}{4}$ すなわち $4 < x$ のとき

$$f(1) = 2 - x + y \geqq 0$$

これより　$y \geqq x - 2$

よって，求める点 (x, y) 全体の集合は

右図の境界を含む斜線部分となる．



(1) 採点

(2) 採点

13

数学　数学Ⅰ，数学A　数学Ⅱ，数学B

令和3年度入学試験問題

解答紙

（4枚のうち3枚目）

受験番号				

受験番号				

13

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔3〕（50点）

〔3〕の採点

(1) $-x^2-2ax-a^3+10a=8x+6$

$x^2+2(a+4)x+a^3-10a+6=0$ …①

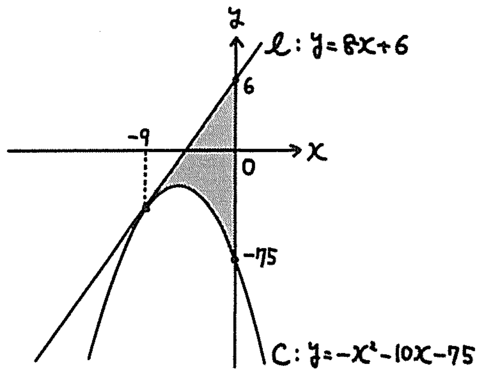
Cとℓが接するのは，①が実数の重解をもつときなので，①の判別式をDとすると，

$$D/4=(a+4)^2-(a^3-10a+6)=0$$
$$a^3-a^2-18a-10=0$$
$$(a-5)(a^2+4a+2)=0$$
$$a=5,\ -2\pm\sqrt{2}$$

$a>0$ より，

$$a=5 \quad \cdots\text{(答)}$$

(2) $a=5$ のとき，C，ℓ，y軸で囲まれた図形は，次の図の斜線部分である。



求める面積をSとすると，

$$S=\int_{-9}^{0}\{(8x+6)-(-x^2-10x-75)\}dx$$
$$=\int_{-9}^{0}(x+9)^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x+9)^3\right]_{-9}^{0}$$
$$=243 \quad \cdots\text{(答)}$$

(1) 採点

(2) 採点

〔４〕（50点）

〔４〕の採点

(1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}$ とする.

$$\begin{array}{rl} S_n = & 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots\quad +n\cdot 2^{n-1} \\ -)\ 2S_n = & \qquad 1\cdot 2+2\cdot 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n \\ \hline -S_n = & 1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n \end{array}$$

$$=\frac{2^n-1}{2-1}-n\cdot 2^n$$

$$=(1-n)\cdot 2^n-1$$

よって,

$S_n=(n-1)\cdot 2^n+1$ …(答)

(2) $a_1=2$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=8$, … より, $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{cases} a_1=2, \\ a_n=2^{n-1} \quad (n\geqq 2\text{のとき}) \end{cases}$$ …(＊) であると推測できる.

これを数学的帰納法で示す.

i) $n=2$ のとき,
上記のように (＊) は成り立つ.

ii) m を2以上の自然数とし, $n\leqq m$ において (＊) が成り立つと仮定する.

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}2^{k-1}-1+2=2^m$,

$\sum_{k=1}^{m}ka_k=S_m-1+2=(m-1)\cdot 2^m+2$

に注意すると,

$$a_{m+1}=1+\frac{1}{2}(m+1)\sum_{k=1}^{m}a_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}ka_k$$

$$=1+\frac{1}{2}(m+1)\cdot 2^m-\frac{1}{2}\cdot\{(m-1)\cdot 2^m+2\}$$

$$=2^m$$

よって, $n=m+1$ のときも (＊) は成り立つ.

(1) 採点

i), ii) より, $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{cases} a_1=2, \\ a_n=2^{n-1} \quad (n\geqq 2\text{のとき}) \end{cases}$$ …(答)

(2) 採点