15	数学 数学Ⅰ，数学A 数学Ⅱ，数学B 数学Ⅲ	令和３年度入学試験問題	受験番号	受験番号

解答紙

（５枚のうち１枚目）

15

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔１〕（50点）　〔１〕の採点

(1) $\overrightarrow{CA}=(1,0,-2)$, $\overrightarrow{CB}=(0,1,-2)$

球の中心をPとおくと，P(r,r,r) (0<r<1) とおける.

また，Pから平面ABCに下ろした垂線の足をHとおくと，Hは平面ABC上の点であるから，

$$\overrightarrow{CH}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}\ (s,t\text{は実数})$$

とおけて，

$$\overrightarrow{OH}=(s,t,2-2s-2t)$$

これより，

$$\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OP}=(s-r,t-r,2-2s-2t-r)$$

$\overrightarrow{PH}\perp$(平面ABC)より

$$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{CA}\ \text{—①}\ \text{かつ}\ \overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{CB}\ \text{—②}$$

が成り立つ.

①より，

$$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$$

$$5s+4t+r=4\ \text{—①}'$$

②より，

$$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{CB}=0$$

$$4s+5t+r=4\ \text{—②}'$$

①′，②′より，

$$s=t=\frac{-r+4}{9}\ \text{—③}$$

このとき，

$$\overrightarrow{PH}=\frac{-5r+2}{9}(2,2,1)$$

であるから，$|\overrightarrow{PH}|=r$ より，

$$\left|\frac{-5r+2}{9}\right|\cdot 3=r$$

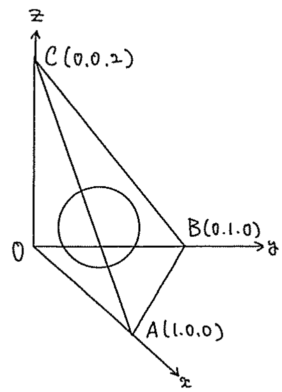
$$(-5r+2)^2=9r^2$$

$$(4r-1)(r-1)=0$$

$$r=\frac{1}{4}.$$

よって，

$$P\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\ \cdots(答)$$



(2) 球の中心をQとおくと，(1)と同様に Q(R,R,R) (R>0) とおける.

Qから平面ABCに下ろした垂線の足をH′とおくと，

$$|\overrightarrow{QH'}|=\left|\frac{-5R+2}{9}\right|\cdot 3=\frac{|-5R+2|}{3}.$$

球と平面ABCが交わる条件は，

$$|\overrightarrow{QH'}|\leqq R$$

より，

$$|-5R+2|\leqq 3R$$

$$\frac{1}{4}\leqq R\leqq 1\ \text{—④}$$

このとき，交わりの円の半径をR′ (R′>0) とおくと，

$$R'^2+|\overrightarrow{QH'}|^2=R^2$$

が成り立つので，

$$R'^2=R^2-\frac{(-5R+2)^2}{9}=-\frac{16}{9}\left(R-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{1}{4}$$

よって，④より，R'^2は

$$R=\frac{5}{8}\text{のとき，最大値}\ \frac{1}{4}$$

をとる.

したがって，求める円の面積の最大値は $\frac{\pi}{4}$ ⋯(答)

(1) 採点

(2) 採点

解答紙

（５枚のうち２枚目）

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔２〕（50点）

〔２〕の採点

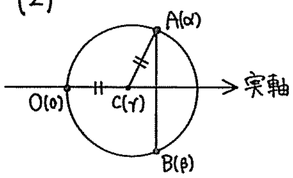
(1) $x^2-(4\cos\theta)x+\dfrac{1}{\tan\theta}=0$ …(*) の判別式をDとすると，条件は，

$\dfrac{D}{4}=4\cos^2\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}<0$ すなわち $4\sin\theta\cos\theta-1<0$ すなわち $\sin2\theta<\dfrac{1}{2}$．…①

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より，$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，① より，

$0<2\theta<\dfrac{\pi}{6}$．すなわち，$0<\theta<\dfrac{\pi}{12}$．…(答)

(2)



(*) は実数係数の方程式なので，$\beta=\bar{\alpha}$ であり，C(γ) は，線分ABの垂直二等分線である実軸上にある．したがって γ は実数であり，OC＝AC より，$|\gamma|=|\alpha-\gamma|$ …②

② から，$\gamma^2=(\alpha-\gamma)(\bar{\alpha}-\gamma)$ より，$0=\alpha\bar{\alpha}-(\alpha+\bar{\alpha})\gamma$．

(*) の解が $x=\alpha,\bar{\alpha}$ なので，解と係数の関係から，$\alpha+\bar{\alpha}=4\cos\theta$，$\alpha\bar{\alpha}=\dfrac{1}{\tan\theta}$ より，

$\dfrac{1}{\tan\theta}-(4\cos\theta)\gamma=0$．すなわち，$\gamma=\dfrac{1}{4\sin\theta}$．…(答)

(3) △OAC は CO＝CA の二等辺三角形であるから，

△OAC が直角三角形となるとき，$\angle OCA=\dfrac{\pi}{2}$ となる．したがって，

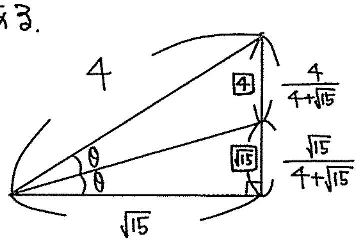
α の実部と γ が一致すればよく，α の実部は，(*) より $2\cos\theta$ であるから，

条件は，$0<\theta<\dfrac{\pi}{12}$ …③ のもとで，

$\dfrac{1}{4\sin\theta}=2\cos\theta$ すなわち，$\sin2\theta=\dfrac{1}{4}$．…④

$0<\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6}$ より，③ かつ ④ を満たす θ はただ一つ存在し，

下の図を満たす角である．



したがって，$\tan\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{15}}{4+\sqrt{15}}}{\sqrt{15}}=4-\sqrt{15}$．…(答)

(1)採点

(2)採点

(3)採点

17

数学 数学Ⅰ，数学A 数学Ⅱ，数学B 数学Ⅲ

令和3年度入学試験問題

解答紙

（5枚のうち3枚目）

受験番号				

受験番号				

17

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔3〕（50点）　　〔3〕の採点

(1) $f(t)=e^t-xt-y$ とすると，$f'(t)=e^t-x$．

「すべての実数 t に対して $f(t)\geqq 0$」…Ⓐとなるための条件を考える．

(ア) $x<0$ のとき

$f'(t)>0$ より $f(t)$ は増加する．$\lim_{t\to-\infty}f(t)=-\infty$ であるから Ⓐとならず不適である．

(イ) $x=0$ のとき

$f'(t)>0$ より $f(t)$ は増加する．$\lim_{t\to-\infty}f(t)=-y$ であるから Ⓐとなるための条件は

$-y\geqq 0$　すなわち $y\leqq 0$

(ウ) $x>0$ のとき

$f(t)$ の増減は右のとおり

t	$\cdots$	$\log x$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$		$\nearrow$

Ⓐとなるための条件は

$f(\log x)\geqq 0$　すなわち　$y\leqq x-x\log x$

(ア)〜(ウ)より (＊)をみたす点 (x, y) 全体の集合は，

「$x=0$ かつ $y\leqq 0$」または「$x>0$ かつ $y\leqq x-x\log x$」

$g(x)=x-x\log x$ $(x>0)$ とすると，$g'(x)=-\log x$

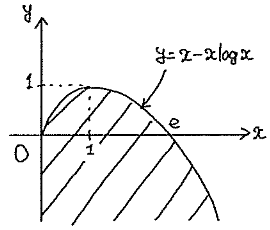
$x>0$ における $g(x)$ の増減は右のとおり

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

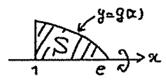
$g(1)=1$，$\lim_{x\to+0}g(x)=0$，$\lim_{x\to\infty}g(x)=-\infty$

よって，(＊)をみたす点 (x, y) 全体の集合は

右の斜線部分で境界はすべて含む．



(2) (1)の結果より，求める体積を V とすると，

$V=$ 

$$=\int_1^e \pi\{g(x)\}^2dx=\pi\int_1^e\{x^2-2x^2\log x+x^2(\log x)^2\}dx$$

ここで，$\int x^2\log x\,dx=\frac{1}{3}x^3\log x-\int\frac{1}{3}x^2dx=\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{9}x^3+C_1$

$$\int x^2(\log x)^2dx=\frac{1}{3}x^3(\log x)^2-\frac{2}{3}\int x^2\log x\,dx=\frac{1}{3}x^3(\log x)^2-\frac{2}{9}x^3\log x+\frac{2}{27}x^3+C_2$$

ゆえに，$\int\{x^2-2x^2\log x+x^2(\log x)^2\}dx=\frac{17}{27}x^3-\frac{8}{9}x^3\log x+\frac{1}{3}x^3(\log x)^2+C_3$

（C_1, C_2, C_3 は積分定数）

よって，

$$V=\pi\left[\frac{17}{27}x^3-\frac{8}{9}x^3\log x+\frac{1}{3}x^3(\log x)^2\right]_1^e=\frac{\pi}{27}(2e^3-17)$$ …(答)

(1) 採点

(2) 採点

18

数学　数学Ⅰ，数学A　数学Ⅱ，数学B　数学Ⅲ

令和３年度入学試験問題

受験番号

受験番号

解答紙

（５枚のうち４枚目）

18

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔４〕（50点）

〔４〕の採点

(1)　$f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ とする．このとき，$f'(x)=2a_2x+a_1$ であり，

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{a_2(\beta^2-\alpha^2)+a_1(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=a_2(\alpha+\beta)+a_1,\quad f'(\gamma)=2a_2\gamma+a_1$$

であるから，$A(\alpha)$，$B(\beta)$ に対して，線分ABの中点を $M(\gamma)$ とすると，

$$\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}\quad すなわち\quad \alpha+\beta=2\gamma$$

より，$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ が成り立つ．

よって，$n=2$ のとき，どのような α，β，$f(x)$ も平均値の性質をもつ．　（証明終り）

(2)　$\alpha=1-i$，$\beta=1+i$ のとき，$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=2$，$\alpha^2+\beta^2=0$

また，2点 α，β を結ぶ線分上の点 γ は，$\gamma=1+ti$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ と表すことができる．

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ のとき，$f'(x)=3x^2+2ax+b$ であり，

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\beta^3-\alpha^3+a(\beta^2-\alpha^2)+b(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2+a(\alpha+\beta)+b=2+2a+b\quad\cdots①$$

$$f'(\gamma)=3\gamma^2+2a\gamma+b=3(1+ti)^2+2a(1+ti)+b=3(1-t^2)+2a+b+2t(3+a)i\cdots②$$

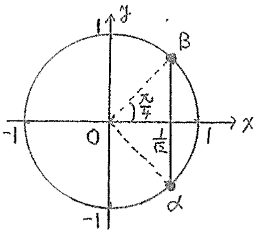
であるから，$\alpha=1-i$，$\beta=1+i$，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が平均値の性質をもつための条件は，①，② および a，b，t が実数であることより，

$$\begin{cases}2+2a+b=3(1-t^2)+2a+b\\ 0=2t(3+a)\end{cases}\quad すなわち\quad \begin{cases}3t^2=1\\ t(3+a)=0\end{cases}$$

を満たす t $(-1\leqq t\leqq 1)$ が存在することである．

$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ は $-1\leqq t\leqq 1$ を満たすので，求める条件は，　$a=-3$，b と c は任意の実数　…（答）

(3)



$$\begin{cases}\alpha=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ \beta=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\end{cases}\quad より，\quad \begin{cases}\alpha^7=\cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7}{4}\pi\right)=\beta\\ \beta^7=\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi=\alpha\end{cases}\quad であるから，$$

$f(x)=x^7$ のとき，$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{\beta^7-\alpha^7}{\beta-\alpha}=\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}=-1$

(1) 採点

$\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$，$\beta=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，$f(x)=x^7$ が平均値の性質をもつとする．

このとき，2点 α，β を結ぶ線分上の点 γ は，$\gamma=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　$\left(r\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ と表すことができ，$f'(x)=7x^6$ より，

(2) 採点

$$7\gamma^6=-1\quad すなわち\quad 7r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)$$

であるから，$\begin{cases}7r^6=1\\ 6\theta=\pi+2N\pi\ \ (N:整数)\end{cases}$ となり，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より，$\begin{cases}r^6=\dfrac{1}{7}\\ \theta=\pm\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$

この r，θ に対して，$(r\cos\theta)^6=r^6\cdot\left(\cos\pm\dfrac{\pi}{6}\right)^6=\dfrac{1}{7}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^6=\dfrac{27}{56}\cdot\dfrac{1}{8}$ であり，

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^6=\dfrac{1}{8}$ であるから，$r\cos\theta\neq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる．

(3) 採点

したがって，$\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$，$\beta=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，$f(x)=x^7$ は平均値の性質をもたない．　（証明終り）

〔５〕（50点）　　〔５〕の採点

(1) $${}_nC_k - n = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} - n$$
$$= n\left\{ \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} - 1 \right\}$$

ここで $A = \dfrac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} - 1$ とおくと

$$A = \frac{n-1}{k}\cdot\frac{n-2}{k-1}\cdots\frac{n-k+1}{2} - 1$$

$2 \leqq k \leqq n-2$ のとき $n > k+1$ であるから

$$\frac{n-1}{k} > 1,\ \frac{n-2}{k-1} > 1,\ \cdots\ \frac{n-k+1}{2} > 1$$

が成り立ち、$A > 0$ である。よって、${}_nC_k > n$ （証明終り）

(2) ${}_nC_k = p$ …①

$k = n$ のとき ① は $1 = p$ となるので (n, k) はない。

$k = 1$ または $k = n-1$ のとき ① は $n = p$ となり

$$(n, k) = (p, 1),\ (p, p-1)$$

$2 \leqq k \leqq n-2$ のとき ① は

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = p$$
$$n! = p\cdot k!(n-k)! \quad ②$$

となる。(1) より $p = {}_nC_k > n$ であるから ② の左辺は p より小さい正の整数の積となり、p で割り切れない。

一方、② の右辺は p で割り切れるから矛盾である。

よって、① を満たす (n, k) はない。

以上より ① を満たす (n, k) は

$$(n, k) = (p, 1),\ (p, p-1) \quad \cdots（答）$$

(1) 採点

(2) 採点