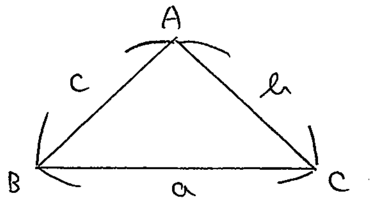
Ⅰ



$$a^2+b^2=2c^2. \cdots ①$$

(1) 余弦定理より，

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{a^2+b^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2)}{2ab} \quad (①より)$$

$$=\frac{a^2+b^2}{4ab}. \quad \cdots(答)$$

(2) $0<\angle ACB<\pi$ より，

$\cos\angle ACB$ が最小のとき，$\angle ACB$ は最大である．(1)より，

$$\cos C=\frac{a^2+b^2}{4ab}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

ここで，$a>0$，$b>0$ より，相加平均・相乗平均の関係を用いて，

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$$

より，

$$\cos C\geqq\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{1}{2}.$$

等号は $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$ かつ $a>0$ かつ $b>0$

すなわち，$a=b$ のとき成り立つ．

以上より，$a=b$ のとき $\angle ACB$ のとり得る最大の角度は，

$$\frac{\pi}{3}. \quad \cdots(答)$$

(3) (2)より，$\angle ACB=\frac{\pi}{3}$ であり，$a=b$ である．①より，

$$a^2+a^2=2c^2.$$

$$a^2=c^2.$$

$a>0$，$c>0$ より，

$$a=c.$$

ここで，三角形ABCの面積について，

$$\frac{1}{2}ab\sin\angle ACB=\frac{r}{2}(a+b+c)$$

であり，$a=b=c$，$\angle ACB=\frac{\pi}{3}$，$r=1$ であるから，

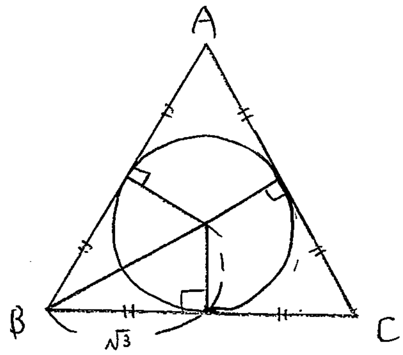
$$\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot 3a.$$

$$\sqrt{3}a^2-6a=0.$$

$$a(\sqrt{3}a-6)=0.$$

よって，$a>0$ より，

$$a=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}. \quad \cdots(答)$$



2/3

Ⅱ

a, b は実数であるから，$\boxed{-1-3i}$ ③ も解である．

$\alpha=-1+3i$，$\beta=-1-3i$ とし，残りの解を γ とすると，

$\alpha+\beta+\gamma=-a$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$

$\alpha\beta\gamma=-40$

すなわち，

$-2+\gamma=-a$

$10-2\gamma=b$

$10\gamma=-40$

より，

$a=\boxed{6}$ ①，$b=\boxed{18}$ ②，$\gamma=\boxed{-4}$ ④．

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+(-4)^3$

$=(-2)^3-3\cdot10(-2)-64$

$=\boxed{-12}$ ⑤．

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$

$=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{-2}{10}-\dfrac{1}{4}$

$=\boxed{-\dfrac{9}{20}}$ ⑥．

Ⅲ

$a_1=k+3$, $a_{n+1}=a_n+2$

より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $k+3$ 公差 2 の等差数列である。

$$\therefore a_n = k+3+2(n-1) = \boxed{2n+k+1}_{①}.$$

次に，$b_1=k+1$, $b_{n+1}=b_n+a_n$ より，$n \geqq 2$ のとき，

$$b_n = b_1 + \sum_{l=1}^{n-1} a_l$$
$$= k+1+\sum_{l=1}^{n-1}(2l+k+1)$$
$$= k+1+(n-1)\cdot n+(k+1)(n-1)$$
$$= n^2+kn.$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，

$$b_n = \boxed{n^2+kn}_{②}.$$

以下では N を正の整数とする。このとき，

$$\sum_{n=1}^{N} b_n = \sum_{n=1}^{N}(n^2+kn)$$
$$= \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)+\frac{k}{2}N(N+1)$$
$$= \frac{1}{6}N(N+1)\left(\boxed{2N+3k+1}_{③}\right).$$

また，

$$\frac{1}{b_n+k-1} = \frac{1}{n^2+kn+k-1}$$
$$= \frac{1}{(n+1)(n+k-1)}$$
$$= \left(\boxed{\frac{1}{k-2}}_{④}\right)\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+\boxed{k-1}_{⑤}}\right)$$

であるので，

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{b_n+k-1}$$

とおくと，$k=3$ のとき，

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{b_n+2}$$
$$= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{N+2}$$
$$= \frac{N}{\boxed{2(N+2)}_{⑥}}.$$