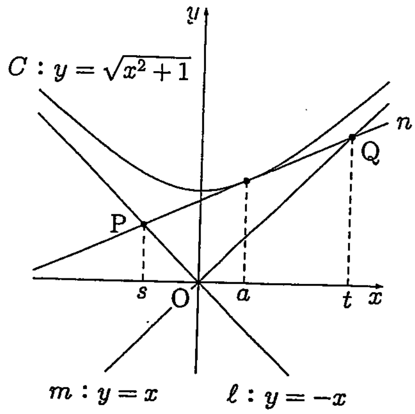
I

(1)



関数 $y=\sqrt{1+x^2}$ を微分すると,

$$y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

であるから, 直線 n の方程式は

$$y=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}(x-a)+\sqrt{1+a^2}.$$

$$y=\frac{ax+1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

$\dfrac{ax+1}{\sqrt{1+a^2}}=-x$ を解くと,

$$x=-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}+a}=a-\sqrt{1+a^2}.$$

$\dfrac{ax+1}{\sqrt{1+a^2}}=x$ を解くと,

$$x=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}-a}=a+\sqrt{1+a^2}.$$

よって,

$$s=a-\sqrt{1+a^2},\quad t=a+\sqrt{1+a^2}.$$ ……(答)

(2) $\mathrm{P}(s,\ -s)$, $\mathrm{Q}(t,\ t)$ より,

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OPQ}&=\frac{1}{2}|st-(-st)|\\&=|st|\\&=\left|\left(a-\sqrt{1+a^2}\right)\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right|\\&=|-1|\\&=1.\end{aligned}$$ ……(答)

(3) 求める体積 V は

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_s^t\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2dx\\&=\pi\left[x+\frac{1}{3}x^3\right]_s^t\\&=\pi\left\{(t-s)+\frac{1}{3}(t^3-s^3)\right\}\\&=\frac{\pi}{3}(t-s)\left\{3+(t^2+st+s^2)\right\}\\&=\frac{\pi}{3}(t-s)\left\{(s+t)^2-st+3\right\}.\end{aligned}$$

ここで,

$$t-s=(a+\sqrt{1+a^2})-(a-\sqrt{1+a^2})=2\sqrt{1+a^2},$$
$$s+t=(a+\sqrt{1+a^2})+(a-\sqrt{1+a^2})=2a,$$
$$st=-1$$

であるから,

$$\begin{aligned}V&=\frac{\pi}{3}\cdot2\sqrt{1+a^2}\left\{(2a)^2-(-1)+3\right\}\\&=\frac{8}{3}\pi(1+a^2)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$ ……(答)

Ⅱ

H は平面 ABC 上にあるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left(\boxed{1-s-t}\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad \cdots ①$$

と表すことができ, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$ より,

$$\begin{cases}\left\{s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right\}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0,\\ \left\{s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right\}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0\end{cases}$$

が成り立つ. また, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ であり,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1\cdot1\cos\gamma=\cos\gamma.$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1\cdot1\cos\beta=\cos\beta.$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=1\cdot1\cos\alpha=\cos\alpha.$$

よって, s, t は連立方程式

$$\left(\boxed{2-2\cos\alpha}\right)s+\left(\boxed{-\cos\alpha-\cos\beta}+\cos\gamma+1\right)t=1-\cos\alpha,$$

$$\left(\boxed{-\cos\alpha-\cos\beta}+\cos\gamma+1\right)s+\left(\boxed{2-2\cos\beta}\right)t=1-\cos\beta \qquad \cdots ②③④$$

を満たす. これらは, $a=1-\cos\alpha$, $b=1-\cos\beta$, $c=1-\cos\gamma$ とおくと,

$$2as+(a+b-c)t=a,$$
$$(a+b-c)s+2bt=b$$

となり, これを解いて

$$s=\frac{1}{a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca}\left(\boxed{-a+b-c}\right)b,$$

$$t=\frac{1}{a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca}\left(\boxed{a-b-c}\right)a \qquad \cdots ⑤⑥$$

と表される. とくに, $\alpha=\beta=\gamma$ のとき, $a=b=c$ であるから

$$s=t=\frac{1}{-3a^2}\cdot(-a^2)=\boxed{\frac{1}{3}} \qquad \cdots ⑦$$

である.

Ⅲ

$$(\alpha^2+3\alpha\beta)^2-9\beta^4=0 \quad \cdots(*)$$

(1) $\beta\neq 0$ より, $(*)$ の両辺を β^4 で割って

$$\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right\}^2-9=0.$$

$t=\dfrac{\alpha}{\beta}$ とおくと,

$$(t^2+3t)^2-9=0.$$

$$(t^2+3t+3)(t^2+3t-3)=0.$$

$$t=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}. \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) 3点 O, A, B が同一直線上にあるとき $\dfrac{\alpha}{\beta}$ は実数なので, (1) よりその値は $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$ である．よって

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}&=\frac{|\alpha|}{|\beta|}\\&=\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\\&=\left|\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}\right|\\&=\frac{\sqrt{21}\pm3}{2}.\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) O, A, B が同一直線上にないとき $\dfrac{\alpha}{\beta}$ は虚数なので,
(1) よりその値は

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}=\sqrt{3}\left(-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}i\right)$$

である．よって

$$r=\sqrt{3},\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta=\pm\frac{1}{2}. \qquad \cdots\cdots(答)$$

さらに, $\mathrm{OB}=a$ とおくと $\mathrm{OA}=\sqrt{3}a$ であり,
$\cos\angle\mathrm{AOB}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから, $\triangle\mathrm{OAB}$ で余弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=a^2+\left(\sqrt{3}a\right)^2-2a\cdot\sqrt{3}a\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=7a^2.\end{aligned}$$

よって $\mathrm{AB}=\sqrt{7}a$ であるから,

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}}=\frac{\sqrt{7}a}{a}=\sqrt{7}. \qquad \cdots\cdots(答)$$

IV

(1) $f(\theta)=\frac{1}{2}(2\cos^2\theta-1)-\frac{1-\cos^2\theta}{\tan^2\theta\cos\theta}$

$$=\cos^2\theta-\frac{1}{2}-\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$=\cos^2\theta-\cos\theta-\frac{1}{2}$$

$$=\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$$

より, $f(\theta)$ は, $\cos\theta=\frac{1}{2}\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ を満たすとき, つまり

$$\theta=\boxed{\frac{\pi}{3}} \qquad \cdots①$$

のとき, 最小値

$$\boxed{-\frac{3}{4}} \qquad \cdots②$$

をとる.

(2) $t=e^{\frac{1}{2}x}$ とおくと, $f(x)=t+\frac{1}{t^3}\ (t>0)$.

$g(t)=t+\frac{1}{t^3}$ とおくと

$$g'(t)=1-\frac{3}{t^4}=\frac{(t^2+\sqrt{3})(t-3^{\frac{1}{4}})(t+3^{\frac{1}{4}})}{t^4}$$

であるから, $t>0$ での $g(t)$ の増減は次の表のようになる.

t	0	$\cdots$	$3^{\frac{1}{4}}$	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘	最小	↗

よって, $f(x)$ の最小値は

$$g\left(3^{\frac{1}{4}}\right)=3^{\frac{1}{4}}+3^{-\frac{3}{4}}=3^{\frac{1}{4}}\times\boxed{\frac{4}{3}} \qquad \cdots③$$

である.

(3) $S_n=\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$

とおくと,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

より,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

$x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ と置換すると

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{4}$

, $\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

より,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta$$

$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\boxed{\frac{\pi}{4}}. \qquad \cdots④$$

IV

(4) 1個のさいころを n 回投げるとき，出る目が1か2だけである確率を q_1，出る目が1か2か3だけである確率を q_2 とすると，

$$P_n = q_2 - q_1 = \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n} \quad \cdots ⑤$$

である．さらに

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\log P_n &= \frac{1}{n}\log\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}\\ &= \frac{1}{n}\log\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\right]\\ &= \frac{1}{n}\left[\log\left(\frac{1}{2}\right)^n + \log\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\right]\\ &= -\log 2 + \frac{1}{n}\log\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P_n = \boxed{-\log 2}. \quad \cdots ⑥$$

(5)
$$0 \leqq y \leqq -x^3 + nx^2 \quad \cdots (*)$$

$-x^3 + nx^2 = -x^2(x-n)$ より，$x \geqq 0$ のとき $(*)$ を満たす整数 y が存在するための x の条件は

$$x \leqq n$$

であり，$x = k$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のとき $(*)$ を満たす整数 y は $-k^3 + nk^2 + 1$ 個あるから，$(*)$ を満たす整数 x，y の組の個数は

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-k^3 + nk^2 + 1)\\ &= -\sum_{k=0}^{n}k^3 + n\sum_{k=0}^{n}k^2 + \sum_{k=0}^{n}1\\ &= -\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + n\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)\\ &= \frac{(n+1)\{-3n^2(n+1) + 2n^2(2n+1) + 12\}}{12}\\ &= \frac{(n+1)(n^3 - n^2 + 12)}{12}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)\left(\boxed{n^2 - 3n + 6}\right)}{12}. \quad \cdots ⑦\end{aligned}$$