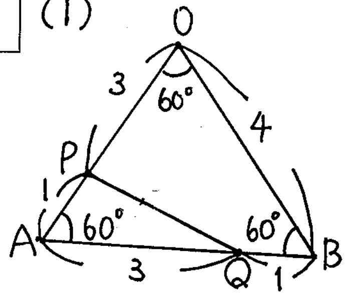
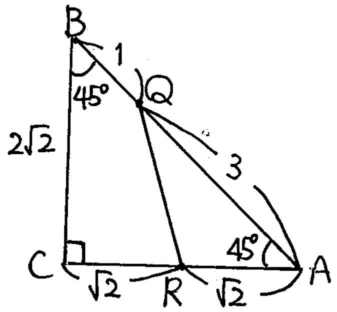
1 (1)



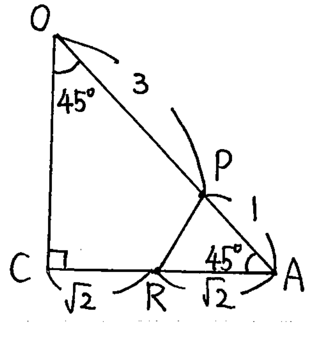

$AP=1$, $AQ=3$, $\angle PAQ=60^\circ$ であるから余弦定理より，

$$PQ^2=1^2+3^2-2\cdot1\cdot3\cos60^\circ$$
$$=7$$
$$PQ=\boxed{\sqrt7}\ \cdots(ア)$$




$AQ=3$, $AR=\sqrt2$, $\angle QAR=45^\circ$ であるから余弦定理より，

$$QR^2=3^2+(\sqrt2)^2-2\cdot3\cdot\sqrt2\cos45^\circ$$
$$=5$$
$$QR=\sqrt5$$




$AP=1$, $AR=\sqrt2$, $\angle PAR=45^\circ$ であるから余弦定理より

$$PR^2=1^2+(\sqrt2)^2-2\cdot1\cdot\sqrt2\cos45^\circ$$
$$=1$$
$$PR=1$$

以上から，三角形PQRにおいて余弦定理を用いると，

$$\cos\angle PQR=\frac{(\sqrt7)^2+(\sqrt5)^2-1^2}{2\cdot\sqrt7\cdot\sqrt5}$$
$$=\boxed{\frac{11}{2\sqrt{35}}}\ \cdots(イ)$$

これと，$\sin\angle PQR>0$ より，

$$\sin\angle PQR=\sqrt{1-\cos^2\angle PQR}$$
$$=\sqrt{1-\frac{121}{140}}$$
$$=\frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{35}}$$

よって，$\triangle PQR$の面積は，

$$\frac12\cdot\sqrt7\cdot\sqrt5\cdot\sin\angle PQR$$
$$=\boxed{\frac{\sqrt{19}}{4}}\ \cdots(ウ)$$

$\boxed{1}$

(2)

Xが2の倍数である事象をA,
Xが3の倍数である事象をB
とする.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$
$$= 1 - \left(\frac{5}{10}\right)^3$$
$$= \boxed{\frac{7}{8}} \quad \cdots (エ)$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B})$$
$$= 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^3$$
$$= \boxed{\frac{657}{1000}} \quad \cdots (オ)$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{3}{10}\right)^3$$
$$= \boxed{\frac{27}{1000}} \quad \cdots (カ)$$

Xが6の倍数である確率は,
$P(A \cap B)$で表され,

$$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B})$$
$$= 1 - \left\{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})\right\}$$
$$= 1 - \left\{\left(\frac{5}{10}\right)^3 + \left(\frac{7}{10}\right)^3 - \left(\frac{3}{10}\right)^3\right\}$$
$$= \boxed{\frac{559}{1000}} \quad \cdots (キ)$$

$\boxed{2}$

(1) $y=3\log_{3\sqrt{3}}(x+3)-\log_{\frac{1}{3}}(2-x)$.

真数条件より

$x+3>0$ かつ $2-x>0$,

すなわち

$-3<x<2$.

このもとで

$$y=3\frac{\log_3(x+3)}{\log_3 3\sqrt{3}}-\frac{\log_3(2-x)}{\log_3\frac{1}{3}}$$

$$=2\log_3(x+3)+\log_3(2-x)$$

$$=\log_3(x+3)^2(2-x)$$

$$=\log_3(-x^3-4x^2+3x+18).$$

$f(x)=-x^3-4x^2+3x+18$

とおくと,

$f'(x)=-3x^2-8x+3$

$=-(3x-1)(x+3)$.

$-3<x<2$ における $f(x)$ の増減は次表のようになる.

| $x$ | $(-3)$ | $\cdots$ | $\frac{1}{3}$ | $\cdots$ | $(2)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $\frac{500}{27}$ | $\searrow$ | |

したがって, $f(x)$ の最大値は

$f(\frac{1}{3})=\frac{500}{27}$

であり, $y=\log_3 f(x)$ より $y$ は

$x=\boxed{\frac{1}{3}}\cdots$(ア) のとき, 最大値 $\log_3\boxed{\frac{500}{27}}\cdots$(イ)

をとる.

また,

$y>\log_{\sqrt{3}}2=\log_3 4$

となるとき,

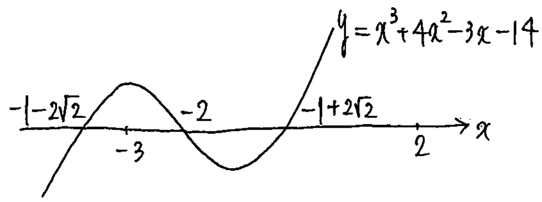
$\log_3 f(x)>\log_3 4$.

$-x^3-4x^2+3x+18>4$.

$x^3+4x^2-3x-14<0$.

$(x+2)(x^2+2x-7)<0$.

$(x+2)\{x-(-1+2\sqrt{2})\}\{x-(-1-2\sqrt{2})\}<0$.




これと $-3<x<2$ より, $x$ の取りうる値の範囲は

$\boxed{-2}<x<\boxed{2\sqrt{2}-1}$

$\cdots$(ウ)　　$\cdots$(エ)

である.

2

(2) 数列$\{a_n\}$の公差を$d$とおくと，初項から第5項までの和が70より

$$\frac{5}{2}(2+2+4d)=70.$$

$$d=6.$$

よって，

$$a_n=2+(n-1)\cdot 6$$
$$=\boxed{6n-4}\ \cdots(オ)$$

であり，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$
$$=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$
$$=\boxed{n(3n-1)}.\ \cdots(カ)$$

また，

$$\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{S_k-2k}=\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{3k^2-k-2k}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=2}^{10}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10}\right)$$
$$=\boxed{\frac{3}{10}}.\ \cdots(キ)$$

$\boxed{3}$

$$f(x)=x^3+px^2-\frac{1}{3}(2p+1)x$$
$$f'(x)=3x^2+2px-\frac{1}{3}(2p+1)$$

(1)

$$f(1)=1+p-\frac{1}{3}(2p+1)=\frac{p+2}{3}$$
$$f'(1)=3+2p-\frac{1}{3}(2p+1)=\frac{4p+8}{3}$$

よって

$$l:\ y=\frac{4p+8}{3}(x-1)+\frac{p+2}{3}$$

すなわち，

$$\boxed{l:\ y=\frac{4p+8}{3}x-p-2}\ \cdots(答)$$

$l$ と $y=f(x)$ の共有点の $x$ 座標は，

$$x^3+px^2-\frac{1}{3}(2p+1)x=\frac{4p+8}{3}x-p-2,$$
$$x^3+px^2-(2p+3)x+p+2=0$$
$$(x-1)^2(x+p+2)=0,$$

より，

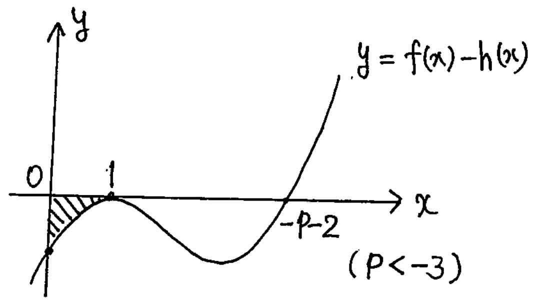
$$\boxed{1,\ -p-2}\ \cdots(答)$$

(2)

$$h(x)=\frac{4p+8}{3}x-p-2$$

とおくと

$$f(x)-h(x)=(x-1)^2(x+p+2)$$




面積に関する条件より，

$$\frac{11}{12}=\int_0^1-\{f(x)-h(x)\}dx$$
$$=\int_0^1-(x-1)^2(x+p+2)dx$$
$$=\int_1^0(x-1)^2\{(x-1)+p+3\}dx$$
$$=\int_1^0\{(x-1)^3+(p+3)(x-1)^2\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}(x-1)^4+(p+3)\cdot\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^0$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{p+3}{3}$$

$$p+3=-2$$

$$\boxed{p=-5}\ \cdots(答)$$

これは，$p<-3$ を満たす．

(3) $x=\sqrt{3}\sin t+\cos t$ とおくと，

$$x=2\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\left(\frac{\pi}{6}\leqq t+\frac{\pi}{6}\leqq \pi+\frac{\pi}{6}\right)$$

$x$，すなわち $\sqrt{3}\sin t+\cos t$ の取りうる値の範囲は，

$$\boxed{-1\leqq\sqrt{3}\sin t+\cos t\leqq 2}\ \cdots(答)$$
$$(-1\leqq x\leqq 2)$$

3

また，(2) の結果もふまえて

$$g(t) = x^3 - 5x^2 + 3x$$

この右辺を $I(x)$ とおくと

$$I'(x) = 3x^2 - 10x + 3$$
$$= (3x-1)(x-3)$$

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $\frac{1}{3}$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $I'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $I(x)$ | $-9$ | $\nearrow$ | $\frac{13}{27}$ | $\searrow$ | $-6$ |

よって求める最大値は，

$\boxed{\frac{13}{27}}$ …(答)

求める最小値は

$\boxed{-9}$ …(答)