1

(1) $\vec{OA}\cdot\vec{OB} = |\vec{OA}|\cdot|\vec{OB}|\cos\angle AOB$ より

$-1 = 1\cdot 2\cdot\cos\angle AOB.$

$\cos\angle AOB = -\frac{1}{2}$ より　$\angle AOB = \boxed{\frac{2}{3}\pi}$ ア.

$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{0}$ より　$\vec{OC} = -\vec{OA}-\vec{OB}.$

$$|\vec{OC}|^2 = |-\vec{OA}-\vec{OB}|^2$$
$$= |\vec{OA}|^2 + 2\vec{OA}\cdot\vec{OB} + |\vec{OB}|^2$$
$$= 1^2 + 2\cdot(-1) + 2^2$$
$$= 3.$$

$|\vec{OC}| = \boxed{\sqrt{3}}$ イ.

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\frac{2}{3}\pi$$
$$= \frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

線分 AB の中点を M とすると CO : OM = 2 : 1 より

$\triangle ABC = 3\triangle OAB = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ ウ.

(2) $S_n = 2a_n - 5n + 3.$　… ①

① で $n=1$ として

$a_1 = 2a_1 - 2,$

$a_1 = \boxed{2}$ エ.

① で $n=2$ として

$a_1 + a_2 = 2a_2 - 7.$

$a_2 = a_1 + 7 = \boxed{9}$ オ.

① より

$S_{n+1} = 2a_{n+1} - 5(n+1) + 3.$ … ②

② − ① より

$S_{n+1} - S_n = 2(a_{n+1} - a_n) - 5.$

$a_{n+1} = \boxed{2a_n + 5}$ カ.

このとき

$a_{n+1} + 5 = 2(a_n + 5),$

$a_n + 5 = (a_1 + 5)\cdot 2^{n-1} = 7\cdot 2^{n-1}.$

$a_n = \boxed{7\cdot 2^{n-1} - 5}$ キ.

(3) $$f(\theta) = \cos 2\theta + 3\cos\theta - 1$$
$$= (2\cos^2\theta - 1) + 3\cos\theta - 1$$
$$= 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2.$$

$t = \cos\theta$,　$g(t) = 2t^2 + 3t - 2$ とおくと

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より　$-1 \leqq t \leqq 1$,　$f(\theta) = g(t).$

$$g(t) = 2t^2 + 3t - 2$$
$$= 2\left(t + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}.$$

$-1 \leqq t \leqq 1$ より

$t = -\frac{3}{4}$ のとき　最小値 $\boxed{-\frac{25}{8}}$ ク.

$t = 1$ のとき　最大値 $\boxed{3}$ ケ.

また　$g(t) = (2t-1)(t+2)$,　$-1 \leqq t \leqq 1$

より　$f(\theta) = 0$ のとき　$t = \frac{1}{2}.$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$　$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ より　$\theta = \boxed{\frac{\pi}{3}}$ コ.

2

(1) 事象 A, B, C を次のように定める.

2枚の硬貨を同時に投げたとき,

A： 2枚とも表が出る.

B： 2枚とも裏が出る.

C： 1枚ずつ表と裏が出る.

Aが起こる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{4}}^{ア}$.

Cが起こる確率は ${}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{2}}^{イ}$.

(2) Bが起こる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

2回の試行で初めて持ち点が2となるのは, A・A となる場合であり, その確率は

$$P_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{16}}^{ウ}.$$

3回の試行で初めて持ち点が2となるのは

ABA, BAA, CAA

となる場合であり, その確率は

$$P_3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$$
$$= \boxed{\frac{1}{16}}^{エ}.$$

(3) 3回目にゲームが終了するのは,

K： 2回の試行で初めて持ち点が2となる

場合であり, その確率は

$$Q_3 = P_2 = \boxed{\frac{1}{16}}^{オ}.$$

4回目にゲームが終了するのは

K： 2回の試行で持ち点が2とならない

G： 2回の試行で初めて持ち点が2となる

場合であり, その確率は

$$Q_4 = (1-P_2)\cdot P_2 = \left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\frac{1}{16}$$
$$= \boxed{\frac{15}{256}}^{カ}.$$

5回目にゲームが終了するのは

K： 3回の試行で初めて持ち点が2となる

G： 2回の試行で持ち点が2とならない

場合であり, その確率は

$$Q_5 = P_3(1-P_2) = \frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{16}\right)$$
$$= \boxed{\frac{15}{256}}^{キ}.$$

6回目にゲームが終了するのは

K： 3回までの試行で持ち点が2とならない

G： 3回の試行で初めて持ち点が2となる

場合であり, その確率は

$$Q_6 = (1-P_2-P_3)P_3$$
$$= \left(1-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)\frac{1}{16}$$
$$= \boxed{\frac{7}{128}}^{ク}$$

6回目までにKが勝つ確率は

$$Q_3 + Q_5 = \frac{1}{16} + \frac{15}{256} = \boxed{\frac{31}{256}}^{ケ}.$$

6回目までKもGも勝てず7回目のゲームを行うのは

K： 3回までの試行で持ち点が2とならない

G： 3回までの試行で持ち点が2とならない

場合であり, その確率は

$$(1-P_2-P_3)^2 = \left(1-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)^2$$
$$= \boxed{\frac{49}{64}}^{コ}.$$

3

(1) $C_2:\ (x-3)^2+(y-a)^2=a^2-4a+5.$

$a^2-4a+5=(a-2)^2+1>0$ より

C_2 の中心の座標は $\boxed{(3,\ a)}$ ア.

半径は $\boxed{\sqrt{a^2-4a+5}}$ イ.

(2) C_2 の方程式を a について整理して

$$x^2+y^2-6x+4+a(-2y+4)=0.$$

a の値によらず C_2 が通過する定点を $(x_0,\ y_0)$ とすると

$$x_0^2+y_0^2-6x_0+4+a(-2y_0+4)=0.$$

これがすべての実数 a で成り立つから

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2-6x_0+4=0, \\ -2y_0+4=0. \end{cases}$$

よって

$$y_0=2,$$

$$(x_0-2)(x_0-4)=0.$$

求める定点の座標は，x 座標が小さい方から順に

$\boxed{(2,\ 2)}$ ウ，$\boxed{(4,\ 2)}$ エ.

(3) C_2 の中心と直線 $x-y+1=0$ の距離を d_1 とすると

$$d_1=\frac{|3-a+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|a-4|}{\sqrt{2}}.$$

$d_1<$（C_2 の半径）より

$$\frac{|a-4|}{\sqrt{2}}<\sqrt{a^2-4a+5}.$$

$$\frac{(a-4)^2}{2}<a^2-4a+5.$$

$$a^2-6>0.$$

よって

$\boxed{a<-\sqrt{6},\ \sqrt{6}<a}$ オ.

(4) （C_1，C_2 の中心間の距離）

＝（C_1 の半径）＋（C_2 の半径）

より

$$\sqrt{a^2+9}=2+\sqrt{a^2-4a+5}.$$

2乗して

$$a^2+9=4+4\sqrt{a^2-4a+5}+(a^2-4a+5).$$

$$a=\sqrt{a^2-4a+5}.$$

$a\geqq0$ であり，両辺を2乗して

$$a^2=a^2-4a+5.$$

$$a=\frac{5}{4}\quad(a\geqq0\ をみたす).$$

よって　$a=\boxed{\dfrac{5}{4}}$ カ.

(5) $a=1$ のとき

$C_1:\ x^2+y^2-4=0$ …①

$C_2:\ x^2+y^2-6x-2y+8=0$ …②

①−② より　$6x+2y-12=0.$

$y=-3x+6.$ …③

A，B の座標は ① かつ ② をみたすから，③ もみたす.

よって直線 AB の方程式は

$y=\boxed{-3x+6}$ キ.

また，2点 A，B を通る円の方程式は k を実数として

$$x^2+y^2-4+k(3x+y-6)=0.$$

とおける. これが原点 O を通るから

$$-4-6k=0,\qquad k=-\frac{2}{3}.$$

このとき円の方程式は

$$x^2+y^2-4-\frac{2}{3}(3x+y-6)=0.$$

すなわち

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{9}.$$

求める円の中心の座標は $\boxed{\left(1,\ \frac{1}{3}\right)}$ ク，

半径は $\boxed{\dfrac{\sqrt{10}}{3}}$ ケ.

3

(1) C_1: 中心 O, 半径 2,

C_2: 中心 (3,1), 半径 $\sqrt{2}$

より 中心間距離 $= \sqrt{10}$.

(半径の差) < (中心間距離) < (半径の和)

より, C_1, C_2 は異なる2点で交わる.

(2) $a = 0$ のとき

C_2: 中心 (3, 0), 半径 $\sqrt{5}$.

C_1 上の点 (x_1, y_1) における C_1 の接線の方程式は

$$x_1 x + y_1 y = 4.$$

$$(\text{ただし } x_1^2 + y_1^2 = 4)$$

この接線と C_2 の中心 (3, 0) との距離が C_2 の半径 $\sqrt{5}$ に等しいから

$$\frac{|3x_1 - 4|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \sqrt{5}.$$

$$\frac{|3x_1 - 4|}{2} = \sqrt{5}.$$

$$x_1 = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{3}.$$

$x_1^2 + y_1^2 = 4$ より $-2 \leqq x_1 \leqq 2$ であるから

$$x_1 = \boxed{\frac{4 - 2\sqrt{5}}{3}}.$$

4

(1) $f(x) = ax^2 + bx - 1$, $g(x) = c\log x$ より

$f'(x) = 2ax + b$, $g'(x) = \dfrac{c}{x}$.

$C_1 : y = f(x)$, $C_2 : y = g(x)$ $(x>0)$ が

点 $(1, 0)$ で共通の接線をもつから

$$\begin{cases} f(1) = g(1), \\ f'(1) = g'(1) \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} a + b - 1 = 0, \\ 2a + b = c. \end{cases}$$

よって

$a = c - 1$, $b = -c + 2$.

(2) $\displaystyle\int_1^2 \log x\,dx = \int_1^2 (x)'\log x\,dx$

$= \Big[x\log x\Big]_1^2 - \displaystyle\int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= \Big[x\log x\Big]_1^2 - \Big[x\Big]_1^2$

$= 2\log 2 - 1$.

$\displaystyle\int_1^2 (\log x)^2\,dx = \int_1^2 (x)'(\log x)^2\,dx$

$= \Big[x(\log x)^2\Big]_1^2 - \displaystyle\int_1^2 x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= \Big[x(\log x)^2\Big]_1^2 - 2\displaystyle\int_1^2 \log x\,dx$

$= 2(\log 2)^2 - 2(2\log 2 - 1)$

$= 2(\log 2)^2 - 4\log 2 + 2$,

(3) $c > 1$ のとき，$a > 0$ より

C_1 は下に凸，C_2 は上に凸

であり，C_1, C_2 は点 $(1, 0)$ で

接線を共有するから，

$1 \leqq x \leqq 2$ で $f(x) \geqq g(x)$.

よって

$S = \displaystyle\int_1^2 \{f(x) - g(x)\}\,dx$

$= \displaystyle\int_1^2 (ax^2 + bx - 1 - c\log x)\,dx$

$= \Big[\dfrac{a}{3}x^3 + \dfrac{b}{2}x^2 - x\Big]_1^2$

$\quad - c\displaystyle\int_1^2 \log x\,dx$

$= \dfrac{7}{3}a + \dfrac{3}{2}b - 1 - c(2\log 2 - 1)$

$= \dfrac{7}{3}(c-1) + \dfrac{3}{2}(-c+2) - 1 - c(2\log 2 - 1)$

$= \left(\dfrac{11}{6} - 2\log 2\right)c - \dfrac{1}{3}$.

よって

$\left(\dfrac{11}{6} - 2\log 2\right)c - \dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{3} - 4\log 2$

$c = 2$. （$c > 1$ をみたす）

$0 < c \leqq 1$ のとき

$f(x) - g(x) = 0$ $(1 \leqq x < 2)$ の最大の解を α

とすると

$S = \left|\displaystyle\int_\alpha^2 (f(x) - g(x))\,dx\right|$

$= \left|\displaystyle\int_\alpha^2 \{(c-1)x^2 + (-c+2)x - 1 - c\log x\}\,dx\right|$

$= \left|\displaystyle\int_\alpha^2 \{c(x^2 - x - \log x) - (x-1)^2\}\,dx\right|$

$p(x) = x^2 - x - \log x$, $q(x) = (x-1)^2$ とおく.

$1 < x < 2$ のとき

$p'(x) = 2x - 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{x} > 0$

$\boxed{4}$

これと $p(1)=0$ から

$$p(x) \geqq 0 \quad (1 \leqq x \leqq 2)$$

同様に $q(x) \geqq 0 \quad (1 \leqq x \leqq 2)$ であるから

$$S = \left| \int_\alpha^2 (cp(x) - q(x))\,dx \right|$$

$$\leqq \max\left\{ c\int_\alpha^2 p(x)\,dx,\ \int_\alpha^2 q(x)\,dx \right\}$$

$$\leqq \max\left\{ \int_1^2 p(x)\,dx,\ \int_1^2 q(x)\,dx \right\}$$

$(0 < c \leqq 1$ より$)$

$$\int_1^2 p(x)\,dx = \int_1^2 (x^2 - x - \log x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 - (2\log 2 - 1)$$

$$= \frac{11}{6} - 2\log 2.$$

$$\int_1^2 q(x)\,dx = \int_1^2 (x-1)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3}$$

また $e \fallingdotseq 2.718\cdots$ より

$$\left(\frac{11}{6} - 2\log 2\right) - \frac{1}{3} = \frac{3}{2} - 2\log 2 > 0$$

$$(e^3 \fallingdotseq 20.08 > 2^4 = 16)$$

よって $\quad S \leqq \dfrac{11}{6} - 2\log 2.$

$$\frac{11}{6} - 2\log 2 - \left(\frac{10}{3} - 4\log 2\right)$$

$$= 2\log 2 - \frac{3}{2} < 0 \text{ より}$$

$$\frac{11}{6} - 2\log 2 < \frac{10}{3} - 4\log 2.$$

よって $0 < c \leqq 1$ のとき $S = \dfrac{10}{3} - 4\log 2$

となることはない。

以上より $c=2.$

このとき $a=1,\ b=0.$

$f(x) = x^2 - 1,\quad g(x) = 2\log x.$

$f'(1) = 2$ より 直線 l の方程式は

$$y = 2(x-1).$$

(4)

$$V = \pi\int_1^2 \left\{ \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 \right\} dx$$

$$= \pi\int_1^2 (x^2-1)^2 dx - 4\pi\int_1^2 (\log x)^2 dx.$$

$$\int_1^2 (x^2-1)^2\,dx = \int_1^2 (x^4 - 2x^2 + 1)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x\right]_1^2 = \frac{38}{15}$$

より

$$V = \pi\cdot\frac{38}{15} - 4\pi\left\{2(\log 2)^2 - 4\log 2 + 2\right\}$$

$$= \pi\left(-\frac{82}{15} - 8(\log 2)^2 + 16\log 2\right).$$