1

(1)　$f(x)=x^5-5x^3+4x$

$$=x(x^4-5x^2+4)$$
$$=x(x^2-1)(x^2-4)$$
$$=x(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$$
$$=(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2).$$ …(答)

任意の整数 n に対して，

$$n-2,\quad n-1,\quad n,\quad n+1,\quad n+2$$

は連続する5つの整数であるから，このうち5の倍数となるものが存在する．

よって，すべての整数 n について

$$f(n)=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$$

は5の倍数となる．

（証明終り）

(2)　$g_1(x)=f(x+1)-f(x)$

$$=(x+1)^4-x^4+a\{(x+1)^3-x^3\}+b\{(x+1)^2-x^2\}+c\{(x+1)-x\}$$
$$=4x^3+6x^2+4x+1+a(3x^2+3x+1)+b(2x+1)+c$$
$$=4x^3+(6+3a)x^2+(4+3a+2b)x+1+a+b+c,$$ …(答)

$g_2(x)=g_1(x+1)-g_1(x)$

$$=4\{(x+1)^3-x^3\}+(6+3a)\{(x+1)^2-x^2\}+(4+3a+2b)\{(x+1)-x\}$$
$$=4(3x^2+3x+1)+(6+3a)(2x+1)+4+3a+2b$$
$$=12x^2+(24+6a)x+14+6a+2b,$$ …(答)

$g_3(x)=g_2(x+1)-g_2(x)$

$$=12\{(x+1)^2-x^2\}+(24+6a)\{(x+1)-x\}$$
$$=12(2x+1)+24+6a$$
$$=24x+36+6a,$$ …(答)

$g_4(x)=g_3(x+1)-g_3(x)$

$$=24\{(x+1)-x\}$$
$$=24.$$ …(答)

(3)　整数を係数とする4次式 $f(x)$ で x^4 の係数が1であり，かつ，条件 P を満たすものが存在すると仮定する．

このとき，(2)のように整式 $g_1(x)$，$g_2(x)$，$g_3(x)$，$g_4(x)$ を定める．

$f(x)$ は条件 P を満たすので，すべての整数 n について $g_1(n)(=f(n+1)-f(n))$ は5の倍数となる．

$g_1(x)$ は条件 P を満たすので，すべての整数 n について $g_2(n)(=g_1(n+1)-g_1(n))$ は5の倍数となる．

$g_2(x)$ は条件 P を満たすので，すべての整数 n について $g_3(n)(=g_2(n+1)-g_2(n))$ は5の倍数となる．

$g_3(x)$ は条件 P を満たすので，すべての整数 n について $g_4(n)(=g_3(n+1)-g_3(n))$ は5の倍数となる．

しかし，(2)より，$g_4(n)=24$ であるから，$24\,(=5\times4+4)$ が5の倍数となり，不合理である．

よって，仮定は誤りであり，整数を係数とする4次式 $f(x)$ で x^4 の係数が1であるものは条件 P を満たさない．

（証明終り）

2

(1) $1-p_2$ は赤球 1 個，白球 1 個を取り出す確率であるから，$n=a+b$，$s=ab$ より，

$$1-p_2=\frac{{}_a\mathrm{C}_1\cdot{}_b\mathrm{C}_1}{{}_n\mathrm{C}_2}=\frac{2ab}{n(n-1)}$$

$$=\frac{2s}{n(n-1)}.\qquad\cdots(答)$$

$1-p_3$ は「赤球 2 個，白球 1 個」または「赤球 1 個，白球 2 個」を取り出す確率であるから，

$$1-p_3=\frac{{}_a\mathrm{C}_2\cdot{}_b\mathrm{C}_1+{}_a\mathrm{C}_1\cdot{}_b\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_3}$$

$$=\frac{3\{a(a-1)b+ab(b-1)\}}{n(n-1)(n-2)}$$

$$=\frac{3ab(a+b-2)}{n(n-1)(n-2)}$$

$$=\frac{3s}{n(n-1)}.\qquad\cdots(答)$$

(2)(i) $p_2=\frac{1}{2}$ のとき，$\frac{2s}{n(n-1)}=\frac{1}{2}$ より，

$$s=\frac{n(n-1)}{4}.\qquad\cdots①$$

これより，

$$1-p_3=\frac{3}{n(n-1)}\cdot\frac{n(n-1)}{4}=\frac{3}{4}.$$

よって，

$$p_3=\frac{1}{4}.\qquad\cdots(答)$$

(ii) $1-p_4$ は「赤球 3 個，白球 1 個」または「赤球 2 個，白球 2 個」または「赤球 1 個，白球 3 個」を取り出す確率であるから，

$$1-p_4=\frac{{}_a\mathrm{C}_3\cdot{}_b\mathrm{C}_1+{}_a\mathrm{C}_2\cdot{}_b\mathrm{C}_2+{}_a\mathrm{C}_1\cdot{}_b\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_4}.$$

ここで，

$${}_a\mathrm{C}_3\cdot{}_b\mathrm{C}_1+{}_a\mathrm{C}_2\cdot{}_b\mathrm{C}_2+{}_a\mathrm{C}_1\cdot{}_b\mathrm{C}_3$$

$$=\frac{a(a-1)(a-2)b}{6}+\frac{a(a-1)b(b-1)}{4}+\frac{ab(b-1)(b-2)}{6}$$

$$=\frac{ab}{12}\{2(a-1)(a-2)+3(a-1)(b-1)+2(b-1)(b-2)\}$$

$$=\frac{s}{12}(2n^2-4s-6n+11+3s-3n)$$

$$=\frac{s}{12}(2n^2-9n-s+11)$$

であるから，

$$p_4=1-\frac{24\cdot\frac{s}{12}(2n^2-9n-s+11)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$=1-\frac{2s\left\{2n^2-9n-\frac{n(n-1)}{4}+11\right\}}{4s(n-2)(n-3)}$$

(①より)

$$=1-\frac{7n^2-35n+44}{8(n-2)(n-3)}.$$

したがって，$n\geqq 4$ より，

$$p_4-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}-\frac{7n^2-35n+44}{8(n-2)(n-3)}$$

$$=-\frac{1}{4(n-2)(n-3)}$$

$$<0$$

であるから，

$$p_4<\frac{1}{8}.\qquad\cdots(答)$$

$\boxed{3}$

(1)

$x_1\overrightarrow{OP_1}+x_2\overrightarrow{OP_2}+\cdots+x_n\overrightarrow{OP_n}=\vec{0}$

について始点を P_1 に統一して，

$$x_1(-\overrightarrow{P_1O})+x_2(\overrightarrow{P_1P_2}-\overrightarrow{P_1O})+\cdots+x_n(\overrightarrow{P_1P_n}-\overrightarrow{P_1O})=\vec{0}.$$

$x_1+x_2+\cdots+x_n=S$ として，

$$S\overrightarrow{P_1O}=x_2\overrightarrow{P_1P_2}+\cdots+x_n\overrightarrow{P_1P_n}.$$

ここで，$S\neq0$ と仮定すると，

$$\overrightarrow{P_1O}=\sum_{k=2}^{n}\frac{x_k}{S}\overrightarrow{P_1P_k}.$$

$k=2,3,\cdots,n$ に対して，

$\overrightarrow{P_1P_k}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{P_1P_k}\parallel$（平面 α）

であるから，

$$\overrightarrow{P_1O}=\vec{0}$$

または，

$$\overrightarrow{P_1O}\parallel(\text{平面}\alpha)$$

となり，平面 α が O を通らないことに反する．したがって，

$$S=x_1+x_2+\cdots+x_n=0.$$

（証明終り）

(2)

$\overrightarrow{OP_i}=t_i\overrightarrow{OA_i}$ より，

$$\overrightarrow{OA_i}=\frac{1}{t_i}\overrightarrow{OP_i}.$$

$(i=1,2,\cdots,6)$

点 $P_1,P_2,\cdots,P_6$ が O を通らない同一平面上にあるとき，

(i) 正三角形 $A_1A_3A_5$ の重心と正三角形 $A_2A_4A_6$ の重心は一致することから，

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_5})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_6}).$$

$$\frac{1}{t_1}\overrightarrow{OP_1}+\frac{-1}{t_2}\overrightarrow{OP_2}+\frac{1}{t_3}\overrightarrow{OP_3}+\frac{-1}{t_4}\overrightarrow{OP_4}+\frac{1}{t_5}\overrightarrow{OP_5}+\frac{-1}{t_6}\overrightarrow{OP_6}=\vec{0}.$$

(1) より，

$$\frac{1}{t_1}+\frac{-1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{-1}{t_4}+\frac{1}{t_5}+\frac{-1}{t_6}=0.$$

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_5}=\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_4}+\frac{1}{t_6}.$$

（証明終り）

(ii) 線分 A_1A_4 の中点と線分 A_2A_5 の中点は一致して，

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_4})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_5}).$$

$$\frac{1}{t_1}\overrightarrow{OP_1}+\frac{-1}{t_2}\overrightarrow{OP_2}+\frac{1}{t_4}\overrightarrow{OP_4}+\frac{-1}{t_5}\overrightarrow{OP_5}=\vec{0}.$$

(1) より，

$$\frac{1}{t_1}+\frac{-1}{t_2}+\frac{1}{t_4}+\frac{-1}{t_5}=0.$$

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_4}=\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_5}.\quad\cdots①$$

線分 A_2A_5 の中点と線分 A_3A_6 の中点は一致して，

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_5})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_6}).$$

同様にして，(1) より

$$\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_5}=\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_6}.\quad\cdots②$$

したがって，①，② より

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_4}=\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_5}=\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_6}.$$（証明終り）

4

$$x^2+(a+1)x+a^2-1=0.\ \cdots(*)$$

(1)　$(*)$ の判別式を D とすると, 2次方程式 $(*)$ が異なる2つの実数解をもつ条件は,

$$D>0.$$

ここで,

$$\begin{aligned}D&=(a+1)^2-4(a^2-1)\\&=(a+1)\{(a+1)-4(a-1)\}\\&=-(a+1)(3a-5)\end{aligned}$$

より,

$$-(a+1)(3a-5)>0.$$

これを解いて,

$$-1<a<\frac{5}{3}.\qquad\cdots(\text{答})$$

(2)　$(*)$ が実数解をもつとき, その実数解を $x=t$ とおくと,

$$t^2+(a+1)t+a^2-1=0$$

を満たす a が $-1<a<\frac{5}{3}$ に存在する, すなわち, a の2次方程式

$$a^2+ta+t^2+t-1=0\ \cdots(**)$$

が $-1<a<\frac{5}{3}$ に解をもつ.

$f(a)=a^2+ta+t^2+t-1$ とおくと, $(**)$ の実数解は $y=f(a)$ のグラフと a 軸との共有点の a 座標である.

よって, $y=f(a)$ のグラフと a 軸との共有点が $-1<a<\frac{5}{3}$ に存在する条件を求める.

$$f(a)=\left(a+\frac{t}{2}\right)^2+\frac{3t^2}{4}+t-1.$$

また,

$$f(-1)=t^2,$$
$$f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{9}(3t+4)^2.$$

より, $f(-1)\geqq 0$ かつ, $f\left(\frac{5}{3}\right)\geqq 0$ であり同時に等号が成立することはない.

よって, 求める条件は,

$$\begin{cases}-1<-\dfrac{t}{2}<\dfrac{5}{3} & \cdots①\\ \text{かつ} & \\ f\left(-\dfrac{t}{2}\right)\leqq 0 & \cdots②\end{cases}$$

となる.

①より,

$$-\frac{10}{3}<t<2.\qquad\cdots①'$$

②より, $f\left(-\frac{t}{2}\right)=\frac{3t^2}{4}+t-1$ であるから,

$$\frac{3t^2}{4}+t-1\leqq 0.$$
$$3t^2+4t-4\leqq 0.$$
$$(t+2)(3t-2)\leqq 0.$$
$$-2\leqq t\leqq\frac{2}{3}.\qquad\cdots②'$$

したがって, 求める解 x の範囲は, ①′, ②′ より,

$$-2\leqq x\leqq\frac{2}{3}.\qquad\cdots(\text{答})$$

5

$$f(x)=\int_{-1}^{x}\frac{dt}{t^2-t+1}+\int_{x}^{1}\frac{dt}{t^2+t+1}$$

より

$$f'(x)=\frac{1}{x^2-x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{(x^2+x+1)-(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{2x}{\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}}$$

であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗

よって,求める最小値は

$$f(0)=\int_{-1}^{0}\frac{dt}{t^2-t+1}+\int_{0}^{1}\frac{dt}{t^2+t+1}\ .$$

ここで，$t=-u$ とおくと

t	$-1\to0$
u	$1\to0$

$$dt=-du\ ,\quad t^2-t+1=u^2+u+1$$

であるから

$$\int_{-1}^{0}\frac{dt}{t^2-t+1}=\int_{1}^{0}\frac{-du}{u^2+u+1}=\int_{0}^{1}\frac{du}{u^2+u+1}\ .$$

したがって

$$f(0)=2\int_{0}^{1}\frac{dt}{t^2+t+1}=2\int_{0}^{1}\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\ .$$

$t+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

t	$0\to1$
θ	$\frac{\pi}{6}\to\frac{\pi}{3}$

$$dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\ ,\quad \left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}$$

であるから

$$f(0)=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{4}{3}\cos^2\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi.$$

…(答)