1

(1) $(3+i)^2=9+6i+i^2=8+6i.$ …(答)

$(3+i)^3=27+27i+9i^2+i^3$

$=18+26i.$ …(答)

$(3+i)^4=(8+6i)^2=64+96i+36i^2$

$=28+96i.$ …(答)

$(3+i)^5=(8+6i)(18+26i)$

$=144+316i+156i^2$

$=-12+316i.$ …(答)

また，これらの虚部の整数を10で割った余りはいずれも

6 …(答)

である．

(2) 2以上のすべての整数nに対して，

「$(3+i)^n$ の実部と虚部は整数であり，実部を10で割った余りは8，虚部を10で割った余りは6である.」…(*)

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す．

[I] $n=2$ のとき，(1)より(*)は成り立つ．

[II] $n=k\ (\geqq 2)$ のとき(*)が成り立つと仮定すると，

$(3+i)^k=(10A+8)+(10B+6)i$

（A, Bは整数）

とおける．

このとき，

$(3+i)^{k+1}=(3+i)^k(3+i)$

$=\{(10A+8)+(10B+6)i\}(3+i)$

$=(30A-10B+18)$

$\quad+(10A+30B+26)i$

$=\{10(3A-B+1)+8\}$

$\quad+\{10(A+3B+2)+6\}i$,

これより，$(3+i)^{k+1}$ の実部と虚部は整数であり，実部を10で割った余りは8，虚部を10で割った余りは6であるから，$n=k+1$ のときも(*)は成り立つ．

以上より，2以上のすべての整数nに対して(*)は成り立つから，$(3+i)^n$ の虚部は0ではなく$(3+i)^n$は虚数である．

また，$n=1$ のとき $(3+i)^1$ は虚数である．

よって，nを正の整数とするとき$(3+i)^n$は虚数であることが示された．

（証明終り）

2

$T(k)=x^2+y^2+z^2+k(xy+yz+zx)$ とおく.

(1) $T(2)=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

$=(x+y+z)^2$

$\geqq 0.$

等号成立条件は

$x+y+z=0$.　(証明終り)

(2) $T(-1)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$=\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2$

$+z^2-2zx+x^2)$

$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$\geqq 0.$

等号成立条件は

$x-y=0$ かつ $y-z=0$ かつ $z-x=0$

より

$x=y=z$.　(証明終り)

(3) $-1<k<2$ のとき, $xy+yz+zx>0$ ならば

$T(k)>T(-1)\geqq 0$

であり, $xy+yz+zx<0$ ならば

$T(k)>T(2)\geqq 0$

である.どちらにしても

$T(k)>0$.

$xy+yz+zx=0$ のとき

$T(k)=x^2+y^2+z^2\geqq 0$

であり,等号成立は

$x^2+y^2+z^2=0$

より

$x=y=z=0$

のとき($xy+yz+zx=0$ を満たす).

以上より, $-1<k<2$ のとき

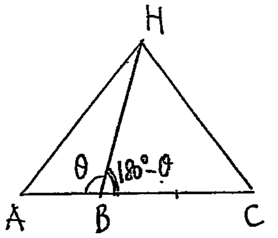
$T(k)\geqq 0$

であり,等号成立条件は

$x=y=z=0$.　(証明終り)

3

(1)



$\angle HBA=\theta$ とおき，三角形HAB，三角形HBCにそれぞれ余弦定理を用いると，

$$AH^2=AB^2+BH^2-2AB\cdot BH\cos\theta \quad \cdots①$$

$$CH^2=BC^2+BH^2-2BC\cdot BH\cos(180^\circ-\theta).$$

$BC=2AB$ より，

$$CH^2=4AB^2+BH^2+4AB\cdot BH\cos\theta \quad \cdots②$$

①×2＋②より，

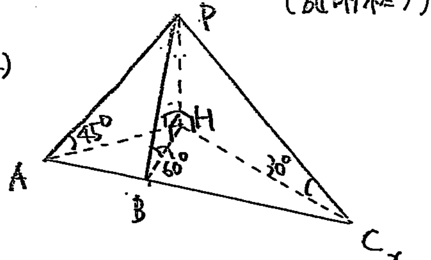
$$2AH^2+CH^2=6AB^2+3BH^2.$$

よって，

$$2AH^2-3BH^2+CH^2=6AB^2.$$

（証明終り）

(2)



$PH=x$ とおくと，$AH=x$，$BH=\frac{x}{\sqrt3}$，$CH=\sqrt3x$ より (1)の結果に代入して，

$$2x^2-3\left(\frac{x}{\sqrt3}\right)^2+(\sqrt3x)^2=6\cdot100^2$$

これより，

$$x^2=\frac32\times100^2$$
$$=15000\ (=50^2\times6)$$

また，$122^2=14884$，$123^2=15129$ であるから，

$$122^2<15000<123^2.$$

よって，$122<x<123$.

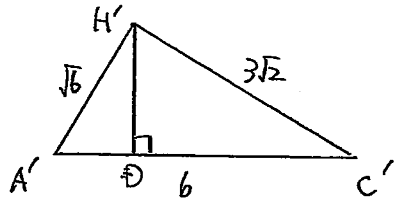
したがって，PHの整数部分は，

122 (m) …(答)

(3) (2)のとき，

$$AH=50\sqrt6,\ CH=150\sqrt2,\ AC=300$$

である．この三角形を $\frac{1}{50}$ 倍に縮小した三角形を三角形H'A'C'とする．



余弦定理より，

$$\cos\angle H'A'C'=\frac{(\sqrt6)^2+6^2-(3\sqrt2)^2}{2\cdot\sqrt6\cdot6}=\frac{\sqrt6}{3}.$$

$0<\angle H'A'C'<180^\circ$ より

$$\sin\angle H'A'C'=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt6}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt3}{3}.$$

H'から，A'C'へ下ろした垂線の足をDとすると，

$$H'D=\sqrt6\times\frac{\sqrt3}{3}=\sqrt2.$$

より，求めるHと道との距離は，

$$50\sqrt2.$$

また，$70^2=4900$，$71^2=5041$ より，

$$70^2<(50\sqrt2)^2<71^2.$$
$$70<50\sqrt2<71$$

よりHと道との距離の整数部分は，

70 (m) …(答)

（参考）$A'D=\sqrt6\times\frac{\sqrt6}{3}=2$ より $A'D:C'D=1:2$.
よって，BはHからACへ下ろした垂線の足より，

$$BH=\frac{x}{\sqrt3}=50\sqrt2.$$