1

(1) $(2+i)^2=4+4i+i^2=3+4i.$ …(答)

$(2+i)^3=8+12i+6i^2+i^3$

$=2+11i.$ …(答)

$(2+i)^4=(3+4i)^2=9+24i+16i^2$

$=-7+24i.$ …(答)

$(2+i)^5=(3+4i)(2+11i)$

$=6+41i+44i^2$

$=-38+41i.$ …(答)

また，これらの虚部の整数を10で割った余りは，順に

4, 1, 4, 1 …(答)

である．

(2) 2以上のすべての整数nに対して，

「$(2+i)^n$の実部と虚部は整数であり，実部と虚部をそれぞれ10で割った余りは，

nが偶数のとき，順に3, 4

nが奇数のとき，順に2, 1

である.」…(*)

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す．

[I] $n=2$のとき，(1)より(*)は成り立つ．

[II] $n=k\ (\geqq 2)$のとき(*)が成り立つと仮定する．

(ア) kが偶数のとき，

$(2+i)^k=(10A+3)+(10B+4)i$

（A, Bは整数）

とおける．

このとき，$k+1$は奇数であり，

$(2+i)^{k+1}=(2+i)^k(2+i)$

$=\{(10A+3)+(10B+4)i\}(2+i)$

$=(20A-10B+2)$

$\quad+(10A+20B+11)i$

$=\{10(2A-B)+2\}$

$\quad+\{10(A+2B+1)+1\}i.$

これより，$(2+i)^{k+1}$の実部と虚部は整数であり，実部を10で割った余りは2，虚部を10で割った余りは1であるから，$n=k+1$のときも(*)は成り立つ．

(イ) kが奇数のとき，

$(2+i)^k=(10C+2)+(10D+1)i$

（C, Dは整数）

とおける．

このとき，$k+1$は偶数であり，

$(2+i)^{k+1}=(2+i)^k(2+i)$

$=\{(10C+2)+(10D+1)i\}(2+i)$

$=(20C-10D+3)$

$\quad+(10C+20D+4)i$

$=\{10(2C-D)+3\}$

$\quad+\{10(C+2D)+4\}i.$

これより，$(2+i)^{k+1}$の実部と虚部は整数であり，実部を10で割った余りは3，虚部を10で割った余りは4であるから，$n=k+1$のときも(*)は成り立つ．

以上より，2以上のすべての整数nに対して(*)は成り立つから，$(2+i)^n$の虚部は0ではなく$(2+i)^n$は虚数である．

また，$n=1$のとき$(2+i)^1$は虚数である．

よって，nを正の整数とするとき$(2+i)^n$は虚数であることが示された．

（証明終り）

$\boxed{2}$

(1) $I=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

$x=\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$，$\begin{array}{c|c} x & 0\to 1 \\ \hline \theta & 0\to\frac{\pi}{2}\end{array}$

であり，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ において，

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$$

となるから，

$$\begin{aligned} I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta)^2d\theta\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\,d\theta\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}(1-\cos4\theta)\,d\theta\\ &=\left[\frac{1}{8}\left(\theta-\frac{1}{4}\sin4\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &=\frac{\pi}{16}.\ \cdots(答)\end{aligned}$$

(2) $J=\int_0^1 x^3\log(x^2+1)\,dx$

$x^2+1=t$ とおくと，

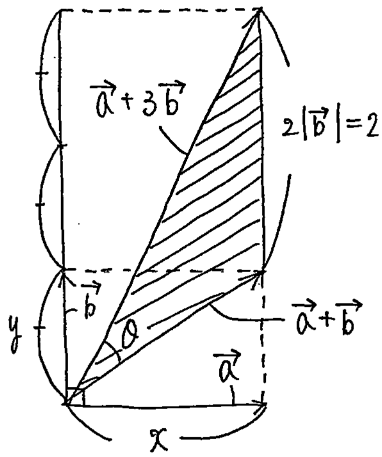
$2x\frac{dx}{dt}=1$，$\begin{array}{c|c} x & 0\to 1 \\ \hline t & 1\to 2\end{array}$

であるから，部分積分法を用いることで，

$$\begin{aligned} J&=\int_1^2\frac{1}{2}(t-1)\log t\,dt\\ &=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{2}(t-1)^2\log t\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}(t-1)^2\cdot\frac{1}{t}dt\right\}\\ &=\frac{1}{4}\log2-\frac{1}{4}\int_1^2\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt\\ &=\frac{1}{4}\log2-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}t^2-2t+\log t\right]_1^2\\ &=\frac{1}{4}\log2-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}+\log2\right)\\ &=\frac{1}{8}.\ \cdots(答)\end{aligned}$$

3

(1)



図より θ は鋭角である．

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{x^2+y^2}$，$|\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{x^2+9y^2}$．

図の斜線をつけた三角形の面積に注目すると，

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+9y^2}\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot x.$$

両辺正のもとで2乗し，整理すると，

$$\sin^2\theta=\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)}.\quad\cdots(答)$$

(2) (1)より

$$\sin^2\theta=\frac{4}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y}+9\frac{y}{x}\right)}$$

$$=\frac{4}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+9\left(\frac{y}{x}\right)^2+10}.\quad\cdots①$$

ここで，相加・相乗平均の大小関係を用いると，

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+9\left(\frac{y}{x}\right)^2\geqq 2\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2\cdot 9\left(\frac{y}{x}\right)^2}=6$$

が成り立つ．

また，等号は

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2=9\left(\frac{y}{x}\right)^2=3\ \text{かつ}\ \frac{x}{y}>0$$

すなわち，

$$x=\sqrt{3}y$$

のとき成り立つ．

したがって，

$\left(\frac{x}{y}\right)^2+9\left(\frac{y}{x}\right)^2+10$ の最小値は16

であり，①より

$\sin^2\theta$ の最大値は $\frac{1}{4}$

である．

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のもとで

「$\sin\theta$ が最大」$\iff$「θ が最大」

が成り立つから，

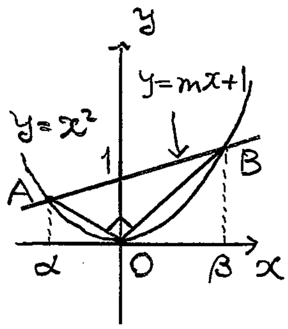
$\sin\theta=\frac{1}{2}$ のとき θ は最大値 $\frac{\pi}{6}$ $\cdots$(答)

をとる．

4

(1)

$\begin{cases} y=x^2, \\ y=mx+1 \end{cases}$



を連立して y を消去すると，

$$x^2=mx+1.$$

$$x^2-mx-1=0.$$

判別式を D として，

$$D=m^2+4>0$$

であり，異なる2つの実数解を小さい順に α, β とおく．

図のように，

$$A(\alpha, \alpha^2),\ B(\beta, \beta^2)$$

と定める．

解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=m,\ \alpha\beta=-1. \cdots ①$$

ここで，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}&=\alpha\beta+\alpha^2\beta^2\\&=(-1)+(-1)^2\\&=0.\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$ であるから，

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ となり，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$.

（証明終り）

(2) (1)の結果より，3点 A, B, O を通る円は，

2点 A, B が直径の両端である円となる．したがって，

① より，求める円の方程式は

$$(x-\alpha)(x-\beta)+(y-\alpha^2)(y-\beta^2)=0.$$

$$x^2+y^2-(\alpha+\beta)x$$
$$-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}y+\alpha\beta+\alpha^2\beta^2=0.$$

$$x^2+y^2-mx-(m^2+2)y=0.$$

$\cdots$（答）

(3)

$\begin{cases} y=x^2, \\ x^2+y^2-mx-(m^2+2)y=0 \end{cases}$

を連立して y を消去すると，

$$x^4-(m^2+1)x^2-mx=0.$$

$$x(x^2-mx-1)(x+m)=0.$$

A, B, O 以外の共有点をもたないための条件は，

(i) $-m=0$

または，

(ii) 方程式 $x^2-mx-1=0$ が $x=-m$ を解にもつ

ことである．

(i) より，$m=0$ であり，(ii) より

$$(-m)^2-m\cdot(-m)-1=0.$$

$$2m^2-1=0.$$

$$m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

よって，$m=0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. $\cdots$（答）

5

(1) 点Pと原点Oの距離をdとおくと，

$$d^2=x^2+y^2$$

$$=\frac{(4+5\cos t)^2+(3\sin t)^2}{(5+4\cos t)^2}$$

$$=\frac{16+40\cos t+25\cos^2 t+9\sin^2 t}{(5+4\cos t)^2}$$

$$=\frac{25+40\cos t+16\cos^2 t}{(5+4\cos t)^2}$$

$$=\frac{(5+4\cos t)^2}{(5+4\cos t)^2}$$

$$=1.$$

$d\geqq 0$より，

$d=1$. …（答）

(2)
$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{(5+4\cos t)^2}\{-5\sin t(5+4\cos t)-(4+5\cos t)(-4\sin t)\}$$

$$=\frac{-9\sin t}{(5+4\cos t)^2},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{(5+4\cos t)^2}\{3\cos t(5+4\cos t)-3\sin t(-4\sin t)\}$$

$$=\frac{12+15\cos t}{(5+4\cos t)^2}.$$

よって，

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=\left(\frac{-9\sin t}{(5+4\cos t)^2},\frac{12+15\cos t}{(5+4\cos t)^2}\right).$$ …（答）

また，

$$\vec{v}=\left(\frac{-3y}{5+4\cos t},\frac{3x}{5+4\cos t}\right)$$

と，$d^2=x^2+y^2=1$に注意すると，

$$|\vec{v}|^2=\frac{9}{(5+4\cos t)^2}.$$

$|\vec{v}|\geqq 0$，$5+4\cos t>0$より

$$|\vec{v}|=\frac{3}{5+4\cos t}.$$ …（答）

(3) (2)より

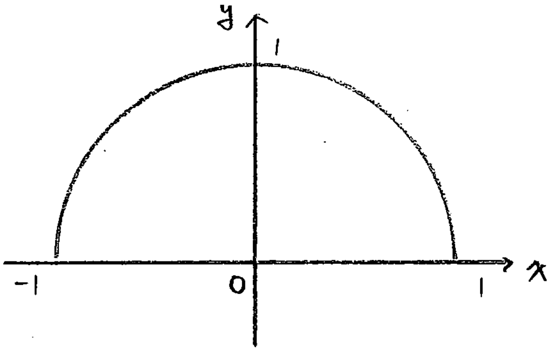
$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{5+4\cos t}=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}|\vec{v}|\,dt.$$ …①

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$	$-$	$-$	0
$\frac{dy}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\vec{v}$の向き	↑	↖	←	↙	↓
(x,y)	$(1,0)$		$(0,1)$		$(-1,0)$

（実数αは，次の条件を満たすものとする．
$0<\alpha<\pi$　かつ　$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$）

5

さらに，(1)に注意すると，tが$0 \leqq t \leqq \pi$の範囲を変化するとき，点Pが描く曲線は，下の図のような半円である．



この曲線の長さはπであるから，

$$\int_0^{\pi} |\vec{v}|\,dt = \pi. \quad \cdots ②$$

①，②より，

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{5+4\cos t} = \frac{\pi}{3}. \quad \cdots (答)$$