［Ⅰ］

（1）　$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$

であるから，

$$(1+i)^8=((1+i)^2)^4=(2i)^4=16\,i^4=16(-1)^2=16$$

$$(1+i)^{10}=(1+i)^8(1+i)^2=16\cdot 2i=\boxed{32i}$$　…(ア)（答）

（2）$f(x)=0$ の解を，α，$\alpha+1$ とすると，解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\alpha+(\alpha+1)=2\alpha+1=-a & \cdots ① \\ \alpha(\alpha+1)=b & \cdots ②\end{cases}$$

また，x の値が 2 から 5 まで変わるときの平均変化率が $\dfrac{13}{2}$ であることより，

$$\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{(5^2+5a+b)-(2^2+2a+b)}{3}$$

$$=7+a=\frac{13}{2}$$

$$a=-\frac{1}{2}$$

①に代入して，$\alpha=\dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$

これを②に代入して，　$b=\left(-\dfrac{1}{4}\right)\left(-\dfrac{1}{4}+1\right)=-\dfrac{3}{16}$

$\alpha=-\dfrac{1}{4}$ であるから，方程式 $f(x)=0$ は確かに実数解を持つ．

よって，a の値は　$a=\boxed{-\dfrac{1}{2}}$　…(イ)（答）

b の値は　$b=\boxed{-\dfrac{3}{16}}$　…(ウ)（答）

［Ⅰ］

(3) (i)　$P(X,\ Y)$ とする．

$$AP : BP = 3 : 4$$

より，

$$3BP = 4AP$$

$$9BP^2 = 16AP^2$$

だから，　$9\{(X-7)^2+Y^2\}=16(X^2+Y^2)$

これを整理して，

$$(X+9)^2+Y^2=7\cdot 9+9^2=12^2$$

よって，点 P の軌跡の方程式は，　$\boxed{(x+9)^2+y^2=144}$　　…(エ)（答）

(ii) 点Pの軌跡

$$(x+9)^2+y^2=12^2 \quad \cdots①$$

は，中心が $C(-9,\ 0)$ 半径が12 の円である．これを境界線とする 2 つの領域のうち，点A を含む領域を D とする．また，

$$y=\sqrt{3}|x+9|=\begin{cases}\sqrt{3}(x+9) & (-9\leqq x \text{ のとき}) \\ -\sqrt{3}(x+9) & (x<-9 \text{ のとき})\end{cases} \quad \cdots②$$

より，この不等式が表す領域を E とすると，領域 D と E の共通部分は下図の斜線部分である．

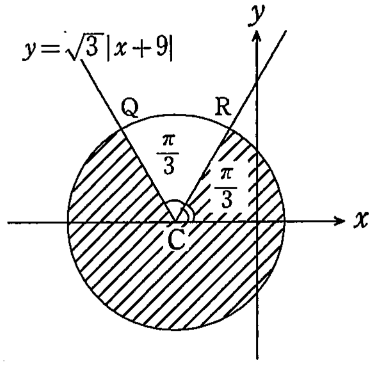
右図のように，①と②の交点をQ，R とすると，

$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ と，$\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$　より，

$$\angle QCR=\frac{\pi}{3}$$

したがって，求める領域の面積は，

$$12^2\pi\times\frac{5}{6}=\boxed{120\pi} \quad \cdots(オ)（答）$$



［Ⅰ］

（4） $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ 　　…①

$$4\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)=2\cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$=2(\cos\theta+1)+2\sin\theta$$
$$=2(\sin\theta+\cos\theta)+2=1$$

よって，　$\sin\theta+\cos\theta=\boxed{-\frac{1}{2}}$ 　　…(カ)（答）

両辺を２乗して，　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

よって，　$\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

であるから，解と係数の関係より，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は２次方程式

$$x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}=0 \quad \cdots ②$$

の解である．②の解は，　$x=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{4}$

であり，①より $\cos\theta \geqq 0$ であるから，　$\sin\theta=\boxed{\frac{-1-\sqrt{7}}{4}}$ 　　…(キ)（答）

（5）（ｉ）a_n を３進法で表した数を b_n とすると，

$$b_2=2\ 1\ 0\ 2\ 1\ 0_{(3)}$$

であるから，

$$a_2=2\times3^5+1\times3^4+0\times3^3+2\times3^2+1\times3^1+0\times3^0$$
$$=486+81+18+3$$
$$=\boxed{588}$$
…(ク)（答）

（ii）　$b_n=2\ 1\ 0\ 2\ 1\ 0\ \cdots\ 2\ 1\ 0\ 2\ 1\ 0_{(3)}$

であるから，

$$a_n=1\times3^1+1\times3^4+1\times3^7+\cdots+1\times3^{3n-2}+2\times3^2+2\times3^5+2\times3^8+\cdots+2\times3^{3n-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}3^{3k-2}+2\sum_{k=1}^{n}3^{3k-1}$$
$$=\frac{3(27^n-1)}{27-1}+\frac{18(27^n-1)}{27-1}=\boxed{\frac{21(27^n-1)}{26}}$$
…(ケ)（答）

［I］

（6）（i）　$6x^2+13xy+7x+5y^2+7y+2$

$=6x^2+(13y+7)x+(5y+2)(y+1)$

$=\boxed{(2x+y+1)(3x+5y+2)}$　　…(コ)（答）

（ii）　$6x^2+13xy+7x+5y^2+7y+2=966$

$(2x+y+1)(3x+5y+2)=2\cdot3\cdot7\cdot23$　　…①

ここで，$X=2x+y+1$，$Y=3x+5y+2$　とすると，

$x>1$，$y>1$ より，$x\geqq2$，$y\geqq2$ なので

$X\geqq2\cdot2+2+1=7$

$Y\geqq3\cdot2+5\cdot2+2=18$

$Y-X=x+4y+1>0$

であるから，①を満たす X と Y の組は，

$\begin{cases}2x+y+1=7\\3x+5y+2=2\cdot3\cdot23\end{cases}$ …②　　$\begin{cases}2x+y+1=23\\3x+5y+2=2\cdot3\cdot7\end{cases}$ …③

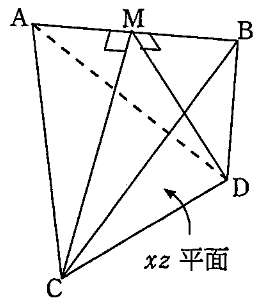
$\begin{cases}2x+y+1=2\cdot7\\3x+5y+2=3\cdot23\end{cases}$ …④　　$\begin{cases}2x+y+1=3\cdot7\\3x+5y+2=2\cdot23\end{cases}$ …⑤

これらを解いて，x と y が整数となるのは，③と⑤であり，

$(x, y)=\boxed{(10, 2), (8, 4)}$　　…(サ)（答）

［Ⅰ］

（7）$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$



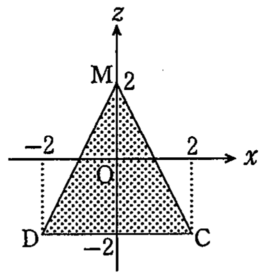
2点A, B は yz 平面 $(x=0)$ 上にあり，xz 平面に関して対称．
2点C, D は xz 平面 $(y=0)$ 上にある．
線分ABの中点をMとすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0+0\\-2+2\\2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

より，点Mは z 軸上にある．
よって，四面体ABCDは △MCD つまり xz 平面に関して対称である．
したがって，求める四面体ABCDの体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{MCD}\cdot\mathrm{AB}$$

と求められる．



ここで，　$\triangle\mathrm{MCD}=\frac{1}{2}(2-(-2))(2-(-2))=8$

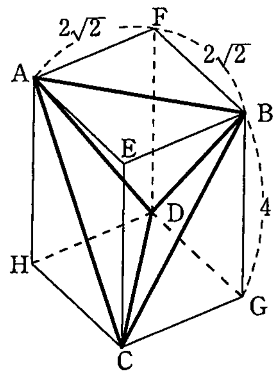
$$\mathrm{AB}=2-(-2)=4$$

であるから，

$$V=\frac{1}{3}\cdot 8\cdot 4=\boxed{\frac{32}{3}}$$　…(シ)（答）

【別解】

四面体AB CDは，右図のような直方体の
４点を結んでできる立体である．
よって，求める体積は，



$$(2\sqrt{2})^2\times 4-4\left\{\frac{1}{3}\cdot(2\sqrt{2})^2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\right\}$$

$$=\boxed{\frac{32}{3}}$$　…(シ)（答）

［Ⅱ］

(1)(i) 正六角形の6つの頂点を，反時計回りに，順に A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 とする．

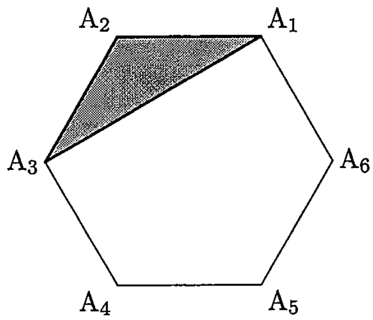
この6つの頂点から異なる3つの点を選ぶとき，選び方は

$$ {}_6C_3 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20\ (\text{通り}) $$

あり，これらは同様に確からしい．

この正六角形の6つの頂点から異なる3つの点を結んでできる三角形のうち，面積が最小であるものは，三角形 $A_1A_2A_3$ と合同なものである．

三角形 $A_1A_2A_3$ は正六角形と2辺を共有する三角形であり，正六角形の2辺に共有される頂点の選び方は6通りあるから，三角形 $A_1A_2A_3$ と合同な三角形をなすような3つの頂点の選び方は6通りある．



したがって，事象 U_6 において，事象 A_6 の確率は，

$$ \frac{6}{20} = \boxed{\frac{3}{10}}. \qquad \cdots(\text{ス})(\text{答}) $$

［II］(つづき1)

(1)(ii) 正n角形のn個の頂点を，反時計回りに，順にA_1，A_2，A_3，$\cdots$，A_nとする．

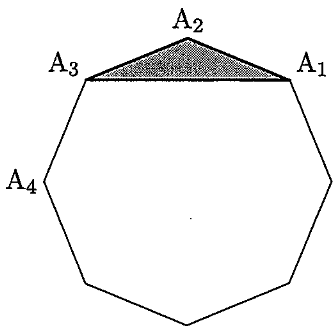
このn個の頂点から異なる3つの点を選ぶとき，選び方は

$${}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\ (\text{通り})$$

あり，これらは同様に確からしい．

この正n角形のn個の頂点から異なる3つの点を結んでできる三角形のうち，面積が最小であるものは，三角形$A_1A_2A_3$と合同なものである．

三角形$A_1A_2A_3$は正n角形と2辺を共有する三角形であり，正n角形の2辺に共有される頂点の選び方はn通りあるから，三角形$A_1A_2A_3$と合同な三角形をなすような3つの頂点の選び方はn通りある．



したがって，事象U_nにおいて，事象A_nの確率をnの式で表すと，

$$\frac{n}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}=\boxed{\frac{6}{(n-1)(n-2)}}.\qquad\cdots(\text{セ})(\text{答})$$

この確率が$\frac{1}{1070}$以下になるためのnの条件は，

$$\frac{6}{(n-1)(n-2)}\leqq\frac{1}{1070}.\qquad\cdots(*)$$

これより，$(n-1)(n-2)\geqq6420$.

$(81-1)\cdot(81-2)=6320$，$(82-1)\cdot(82-2)=6480$であり，$n\geqq6$において$(n-1)(n-2)$は増加するから，$(*)$が成り立つような最小のnの値は，

$$\boxed{82}.\qquad\cdots(\text{ソ})(\text{答})$$

[Ⅱ] (つづき2)

(1)(iii) 以下，全事象を $U_n \cap \overline{A_n}$ とみる．

事象 $U_n \cap \overline{A_n}$ における3つの頂点の選び方は，事象 U_n における3つの頂点の選び方から事象 A_n における3つの頂点の選び方を除いたものである．

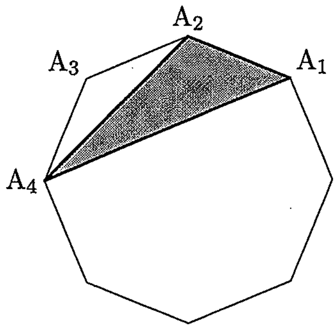
よって，事象 $U_n \cap \overline{A_n}$ における3つの頂点の選び方は，

$$ {}_n\mathrm{C}_3 - n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n = \frac{n(n+1)(n-4)}{6} \text{ (通り)} $$

ある．

事象 $U_n \cap \overline{A_n}$ において，できる三角形のうち，面積が最小であるものは，三角形 $\mathrm{A_1A_2A_4}$ と合同なものである．

三角形 $\mathrm{A_1A_2A_4}$ と合同な三角形をなすような3つの頂点の選び方は，辺 $\mathrm{A_1A_2}$ に相当する辺と点 $\mathrm{A_4}$ に相当する点の選び方である $n \cdot 2$ 通りだけある．



したがって，事象 $U_n \cap \overline{A_n}$ において，面積が最小となる三角形ができる確率を n の式で表すと，

$$ \frac{n \cdot 2}{\frac{n(n+1)(n-4)}{6}} = \boxed{\frac{12}{(n+1)(n-4)}}. \qquad \cdots (タ)(答) $$

［注］

(iii) において,「「事象 $U_n \cap \overline{A_n}$ において，面積が最小となる三角形ができる」確率」と解釈し，全事象を U_n と捉えた場合，$\boxed{\text{タ}}$ にあてはまるものは，

$$ \frac{n \cdot 2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \boxed{\frac{12}{(n-1)(n-2)}} $$

となる．

［Ⅱ］

(2) 立方体の8つの頂点に区別をつける．

この8つの頂点から異なる3つの点を選ぶとき，選び方は

$$ {}_8\mathrm{C}_3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = 56\ (\text{通り}) $$

あり，これらは同様に確からしい．

V において，できる三角形は次のとおりである．

(Ⅰ) 3辺の長さが $\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，2の直角二等辺三角形．

各面に4つずつあるので，全部で $4\cdot6=24$ (個) ある．

(Ⅱ) 3辺の長さが $\sqrt{2}$，2，$\sqrt{6}$ の直角三角形．

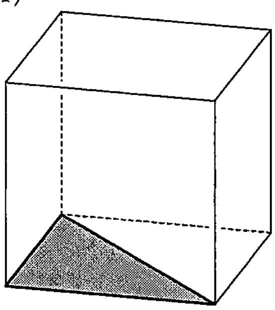
各辺に対して2つずつあるので，全部で $2\cdot12=24$ (個) ある．

(Ⅲ) 1辺の長さが2の正三角形．

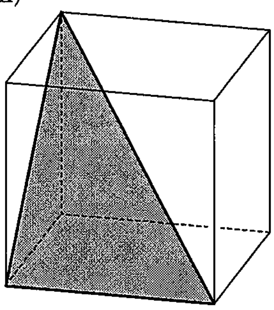
立方体の頂点1つに対して，その点を一端とする3辺それぞれの他端を結ぶと，正三角形が1つ得られる．

したがって，(Ⅲ) の三角形は全部で8個ある．

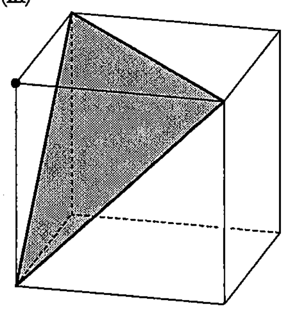
(Ⅰ)



(Ⅱ)



(Ⅲ)



(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)，それぞれの三角形の個数の合計は $24+24+8=56$ であるから，事象 V に含まれる三角形は，(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ) のいずれかと合同である．

以上より，事象 V に含まれるすべての三角形の面積の平均値は，

$$ \frac{1}{56}\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\right)\cdot24+\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot2\right)\cdot24+\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\sin60^\circ\right)\cdot8\right\} = \boxed{\frac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{7}}. $$

…(チ)(答)

［Ⅱ］

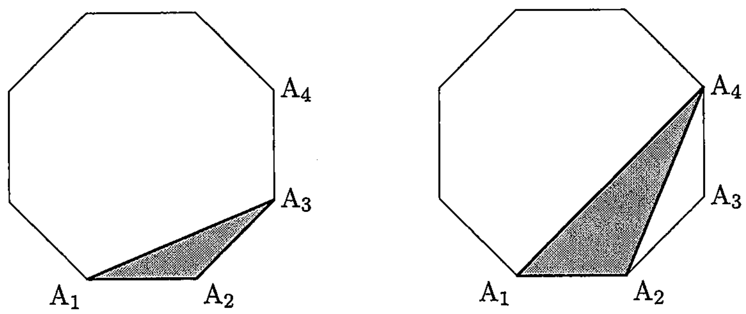
【補足】

(1) において,「正 n 角形の n 個の頂点から異なる 3 つの点を結んでできる三角形のうち，面積が最小であるものは三角形 $\mathrm{A_1A_2A_3}$ と合同なもの」であることと「事象 $U_n \cap \overline{A_n}$ において，できる三角形のうち，面積が最小であるものは三角形 $\mathrm{A_1A_2A_4}$ と合同なもの」であることを利用しているが，それらのことは次のようにして説明される．

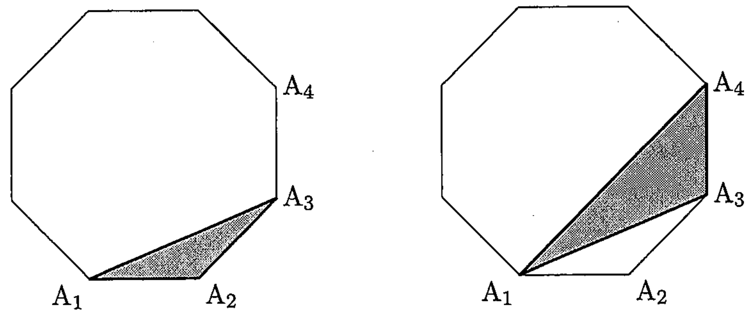
(説明)

事象 U_n において，正 n 角形の n 個の頂点から異なる 3 つの点を結んでできる三角形の集合を T_n とする．

T_n の要素で，正 n 角形と辺 $\mathrm{A_1A_2}$ を共有するもののうち，面積が最小であるものは三角形 $\mathrm{A_1A_2A_3}$ と合同なものであり，その次に面積が小さいものは三角形 $\mathrm{A_1A_2A_4}$ と合同なものである．

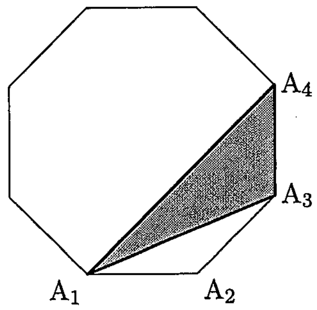


T_n の要素で，正 n 角形と対角線 $\mathrm{A_1A_3}$ を共有するもののうち，面積が最小であるものは三角形 $\mathrm{A_1A_2A_3}$ と合同なものであり，その次に面積が小さいものは三角形 $\mathrm{A_1A_3A_4}$ と合同なものである．そして，三角形 $\mathrm{A_1A_3A_4}$ と三角形 $\mathrm{A_1A_2A_4}$ は合同である．

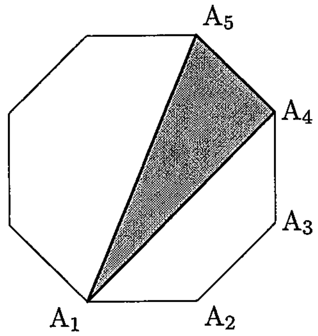


［Ⅱ］（つづき）

T_n の要素で，正 n 角形と対角線 A_1A_4 を共有するもののうち，面積が最小であるものは三角形 $A_1A_3A_4$ と合同なものである．



T_n の要素で，正 n 角形と対角線 A_1A_5 を共有するもののうち，面積が最小であるものは三角形 $A_1A_4A_5$ と合同なものであり，その面積は三角形 $A_1A_3A_4$ の面積より大きい．



以下，正 n 角形の対角線 A_1A_6，A_1A_7,，A_1A_8，$\cdots$，A_1A_m において同様のことを行うと，どの場合においても，面積が最小となる三角形の面積が三角形 $A_1A_2A_4$ の面積よりも大きくなることがわかる．なお，m は $\dfrac{n}{2}+1$ 以下の最大の整数である．

したがって，T_n の要素で，面積が最小であるものは三角形 $A_1A_2A_3$ と合同なものであり，その次に面積が小さいものは三角形 $A_1A_2A_4$ と合同なものである．

（説明終り）

［Ⅲ］

（1）　$y=x^3+(a+4)x^2+(4a+6)x+4a+2$

より，

$$x^3+4x^2+6x+2-y+a(x^2+4x+4)=0$$

これを，実数 a についての恒等式とみると，

$$x^3+4x^2+6x+2-y=0 \quad \cdots①$$

$$x^2+4x+4=0 \quad \cdots②$$

②より，

$$x=-2$$

①に代入して，

$$y=-2$$

よって，点 P の座標は $\boxed{(-2,-2)}$　…(ツ)　(答)

ここで，

$$f(x)=x^3+4x^2+6x+2+a(x+2)^2$$

より，

$$f'(x)=3x^2+8x+6+2a(x+2)$$

点 P における接線の傾きは，

$$f'(-2)=12-16+6=2$$

より，

求める接線の方程式は，

$$y+2=2(x+2)$$

よって，

$$y=\boxed{2x+2}$$　…(テ)　(答)

[Ⅲ]

(2)　a＝5のとき，

$$f(x)=x^3+9x^2+26x+32.$$

$$f'(x)=3x^2+18x+26$$

$$=3(x+3)^2-1$$

であるから，接線の傾きが最小となるのは，

$x=\boxed{-3}$ においてである．　…(ト)　(答)

(3)　$f(x)=x^3+4x^2+6x+2+a(x+2)^2$

より，

$$f'(x)=3x^2+8x+6+2a(x+2)$$

$x=-3$ において，$f(x)$ が極値をとるとき，

$$f'(-3)=0.$$

$$27-24+6-2a=0$$

よって，

$$a=\frac{9}{2}$$

このとき，

$$f'(x)=3x^2+17x+24$$

$$=(3x+8)(x+3)$$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	$-\frac{8}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

確かに，$x=-3$ で極値をもつから，

$a=\boxed{\frac{9}{2}}$　…(ナ)　(答)

[Ⅲ]

(3)つづき

これより,

$$f(x)=x^3+\frac{17}{2}x^2+24x+20.$$

$$f(-3)=-27+\frac{17}{2}\cdot 9-72+20$$

$$=-\frac{5}{2}$$

よって,

$$S\left(-3,\ -\frac{5}{2}\right)$$

次に,(1)より,$y=2x+2$が$y=f(x)$と交わる点Qのx座標は,

$$x^3+\frac{17}{2}x^2+24x+20=2x+2$$

$$(x+2)^2\left(x+\frac{9}{2}\right)=0$$

点Qのx座標は,$-\frac{9}{2}$

よって,

$$Q\left(-\frac{9}{2},\ -7\right)$$

これを用いると,

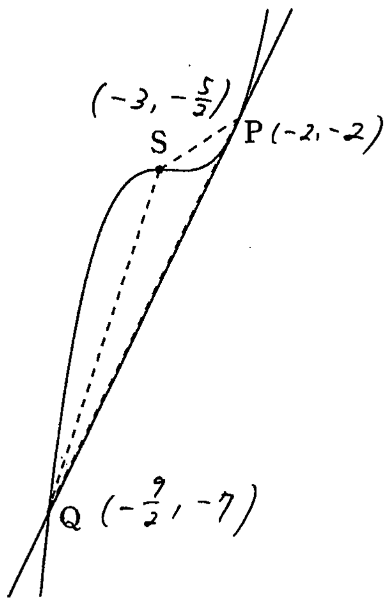
$$\overrightarrow{QP}=\left(\frac{5}{2},5\right)$$

$$\overrightarrow{QS}=\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$$

三角形SPQの面積は,

$$\frac{1}{2}\left|\frac{5}{2}\cdot\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\cdot 5\right|$$

$$=\boxed{\frac{15}{8}}$$



…(ニ)（答）