[I]

(1) $-5\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. …①

①より，

$$5\overrightarrow{OA}=7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}.$$

$$|5\overrightarrow{OA}|^2=|7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}|^2$$

$$25|\overrightarrow{OA}|^2=49|\overrightarrow{OB}|^2+2\cdot 7\cdot 8\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+64|\overrightarrow{OC}|^2.$$

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$ であるから，

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{49+64-25}{2\cdot 7\cdot 8}=-\frac{11}{14}.$$

したがって，

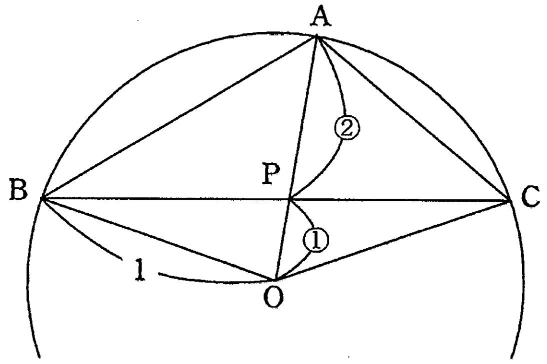
$$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OB}|^2=\frac{25}{7}.$$

$$BC=\boxed{\frac{5}{\sqrt{7}}}.$$ …(あ)(答)

①より

$$\overrightarrow{OA}=\frac{1}{5}(7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC})=3\cdot\frac{7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}}{8+7}.$$

したがって，線分 BC を 8 : 7 に内分する点を D とするとき，$\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OD}$ と表せるので，D は直線 OA と直線 BC の交点 P である．OA=1 であるから，$OP=\boxed{\frac{1}{3}}$. …(い)(答)



また，$|\overrightarrow{OA}|=3|\overrightarrow{OP}|$ であるから，$\triangle ABC=2\triangle OBC$.

$$\triangle ABC=2\cdot\triangle OBC=2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OC}|^2-(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})^2}$$

$$=\sqrt{1-\left(-\frac{11}{14}\right)^2}=\frac{\sqrt{(14+11)(14-11)}}{14}=\boxed{\frac{5\sqrt{3}}{14}}.$$ …(う)(答)

［Ｉ］（つづき１）

(2)　$y=0$ のとき，

$$x^{\alpha}-mx=0 \iff x^{\alpha}(1-m\cdot x^{1-\alpha})=0 \iff x=0,\ x^{1-\alpha}=\frac{1}{m}.$$

したがって，$x=0,\ \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$．ここで，$\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}=m^{\frac{1}{\alpha-1}}=p$ とおく．

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^p y^2dx=\pi\int_0^p(x^{\alpha}-mx)^2dx=\pi\int_0^p(x^{2\alpha}-2mx^{1+\alpha}+m^2x^2)dx\\&=\pi\left[\frac{1}{1+2\alpha}x^{1+2\alpha}-\frac{2m}{2+\alpha}x^{2+\alpha}+\frac{m^2}{3}x^3\right]_0^p\\&=\pi\left(\frac{1}{1+2\alpha}p^{1+2\alpha}-\frac{2m}{2+\alpha}p^{2+\alpha}+\frac{m^2}{3}p^3\right).\end{aligned}$$

ここで，$p^{\alpha}-mp=0 \iff p^{\alpha}=mp$ より，

$$\begin{aligned}V&=\pi\left\{\frac{1}{1+2\alpha}(mp)^2\cdot p-\frac{2m}{2+\alpha}mp\cdot p^2+\frac{m^2}{3}p^3\right\}\\&=\pi m^2p^3\left(\frac{1}{1+2\alpha}-\frac{2}{2+\alpha}+\frac{1}{3}\right)\\&=\pi m^2\cdot m^{\frac{3}{\alpha-1}}\left(\frac{1}{1+2\alpha}-\frac{2}{2+\alpha}+\frac{1}{3}\right)\\&=\pi m^{\frac{2\alpha+1}{\alpha-1}}\left(\frac{1}{1+2\alpha}-\frac{2}{2+\alpha}+\frac{1}{3}\right).\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{\alpha\to+0}V=\pi m^{-1}\cdot\frac{1}{3}=\boxed{\frac{\pi}{3m}}.$$　…(え)(答)

また，

$$m^3V=\pi m^{\frac{5\alpha-2}{\alpha-1}}\left(\frac{1}{1+2\alpha}-\frac{2}{2+\alpha}+\frac{1}{3}\right).$$

$$\lim_{m\to\infty}m^{\beta}=\begin{cases}0 & (\beta<0\text{ のとき})\\1 & (\beta=0\text{ のとき})\\\infty & (\beta>0\text{ のとき})\end{cases}$$

であるから，m^3V が 0 以外の値に収束するためには，$\frac{5\alpha-2}{\alpha-1}=0$ であることが必要．

$$\frac{5\alpha-2}{\alpha-1}=0 \iff \alpha=\frac{2}{5}.$$

このとき，

$$\lim_{m\to\infty}m^3V=\pi\left(\frac{1}{1+\frac{4}{5}}-\frac{2}{2+\frac{2}{5}}+\frac{1}{3}\right)=\pi\left(\frac{5}{9}-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{18}$$

であり，確かに 0 ではない数に収束する．したがって，$\alpha=\boxed{\frac{2}{5}}$．　…(お)(答)

［Ⅰ］（つづき２）

(3)　$x^2+kx+k+35=0$．　…①

$$A=\{k \mid k\in U \text{かつ} \alpha_k,\ \beta_k \text{はともに実数で} \alpha_k \neq \beta_k\}$$

① が異なる２つの実数解をもつとき，その判別式を D とすると，$D>0$ を満たす．

$D=k^2-4(k+35)>0$．

$(k-14)(k+10)>0$．

$k<-10$，$14<k$．

したがって，$A=\{k \mid k\in U$ かつ $-100\leqq k\leqq -11$，$15\leqq k\leqq 100\}$ であり，

$n(A)=\{-11-(-100)+1\}+(100-15+1)=\boxed{176}$．　…(か)

$$B=\{k \mid k\in U \text{かつ} \alpha_k,\ \beta_k \text{の実部はともに2より大きい}\}$$

$\alpha_k+\beta_k=-k$ であるから，① が実数解をもつとき２解は共に実数である．

$f(x)=x^2+kx+k+35$ とおけば，

$$\begin{cases} \text{① の判別式 } D\geqq 0 \\ \text{軸}：-\dfrac{k}{2}>2 \\ f(2)>0 \end{cases} \iff \begin{cases} k\leqq -10,\ 14\leqq k \\ k<-4 \\ k>-13 \end{cases}$$

したがって，$-12\leqq k\leqq -10$．　…②

① が虚数解をもつとき，共役な複素数解をもち，その実部は $\dfrac{\alpha_k+\beta_k}{2}$ である．したがって，

$$\begin{cases} \text{① の判別式 } D<0 \\ \dfrac{\alpha_k+\beta_k}{2}=-\dfrac{k}{2}>2 \end{cases} \iff \begin{cases} -10<k<14 \\ k<-4 \end{cases}$$

したがって，$-9\leqq k\leqq -5$．　…③

②，③ より，$B=\{k \mid k\in U$ かつ $-12\leqq k\leqq -5\}$ であり $n(B)=8$．

また，$A\cap B=\{k \mid k\in U$ かつ $-12\leqq k\leqq -11\}$ であるから，$n(A\cap B)=\boxed{2}$．　…(き)(答)

さらに，

$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=\boxed{6}$．　…(く)(答)

$$C=\{k \mid k\in U \text{かつ} \alpha_k,\ \beta_k \text{の実部と虚部は全て整数}\}$$

① が実数解をもつとき，判別式 $D\geqq 0$ より $k\leqq -10$，$14\leqq k$ である．また解と係数の関係より，

$$\begin{cases} \alpha_k+\beta_k=-k \\ \alpha_k\beta_k=k+35 \end{cases}$$

２式を辺々加えると，

$\alpha_k\beta_k+\alpha_k+\beta_k=35 \iff (\alpha_k+1)(\beta_k+1)=36$．

$\alpha_k\leqq\beta_k$ としても一般性を失わず，

$(\alpha_k+1,\ \beta_k+1)$

$=(1,\ 36)$，$(2,\ 18)$，$(3,\ 12)$，$(4,\ 9)$，$(6,\ 6)$，

$(-6,\ -6)$，$(-9,\ -4)$，$(-12,\ -3)$，$(-18,\ -2)$，$(-36,\ -1)$

［Ⅰ］（つづき３）

これに対応する k を求めると，

$$k=-(\alpha_k+\beta_k)=-35,\ -18,\ -13,\ -11,\ -10,\ 14,\ 15,\ 17,\ 22,\ 39.$$

の 10 通りである．($k=-10$, 14 のときは$\alpha_k=\beta_k$，それ以外は $\alpha_k\fallingdotseq\beta_k$)

① が虚数解をもつとき，判別式 $D<0$ より，$-9\leqq k\leqq 13$ である．このとき ① を解くと

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-4k-140}}{2}=-\frac{k}{2}\pm\frac{\sqrt{-k^2+4k+140}}{2}i$$

実部が整数であるから k は偶数であり，このとき $-k^2+4k+140$ は 4 の倍数である．したがって虚部が整数となる必要十分条件は，$-k^2+4k+140$ が平方数となること．

つまり，$-k^2+4k+140=m^2$ $(m\geqq 0)$ を満たす整数 m が存在することである．

$$-k^2+4k+140=m^2 \iff m^2+(k-2)^2=144.$$

これを満たす組は，

$$(m^2,\ (k-2)^2)=(12^2,\ 0),\ (0,\ 12^2)$$

のみである．$k-2=0$, 12, -12．このうち $-9\leqq k\leqq 13$ を満たすのは，$k=2$ のみ．

$$C=\{-35,\ -18,\ -13,\ -11,\ -10,\ 2,\ 14,\ 15,\ 17,\ 22,\ 39\}.$$

したがって，$n(C)=11$，$n(A\cap C)=\boxed{\ 8\ }$，$n(\overline{A}\cap C)=\boxed{\ 3\ }$．　…(け)(こ)(答)

[II]

(1)

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i=\boxed{\frac{n+1}{2}}.\qquad \cdots\text{(あ) (答)}$$

分散の公式 ${s_x}^2=\overline{(x^2)}-(\overline{x})^2$ より

$$\begin{aligned}{s_x}^2&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i^2-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\\&=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}\\&=(n+1)\left(\frac{2n+1}{6}-\frac{n+1}{4}\right)\\&=\frac{(n+1)(n-1)}{12}=\boxed{\frac{n^2-1}{12}}\end{aligned}\qquad \cdots\text{(い) (答)}$$

(2)　(1) と同じ計算で $\overline{y}=\dfrac{n+1}{2}$,　${s_y}^2=\dfrac{n^2-1}{12}$ である.

共分散の公式 $s_{xy}=\overline{(xy)}-(\overline{x})(\overline{y})$ より

$$\begin{aligned}s_{xy}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{(n+1)^2}{4}.\end{aligned}\qquad \cdots\cdots ①$$

① $\times n$ は, $n=2(2\ell+1)=4\ell+2$　(ℓは整数) のとき,

$$\begin{aligned}ns_{xy}&=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{n(n+1)^2}{4}\\&=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{(2\ell+1)(4\ell+3)^2}{2}\end{aligned}$$

となる. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ は整数であり, $\dfrac{(2\ell+1)(4\ell+3)^2}{2}$ は整数でないので, ns_{xy} も整数でない. 特に $ns_{xy}\neq 0$ である. よって, $s_{xy}\neq 0$.

(証明終り)

(3)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i&=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2+\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i^2-\sum_{i=1}^{n}{d_i}^2\right)\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{d_i}^2\end{aligned}$$

となる. これを ① に代入して,

$$\begin{aligned}s_{xy}&=\left\{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}{d_i}^2\right\}-\frac{(n+1)^2}{4}\\&=\frac{(n+1)(n-1)}{12}-\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}{d_i}^2.\end{aligned}$$

[II]　(つづき)

相関係数の定義 $r=\dfrac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y}$ より

$$r=\frac{\dfrac{(n+1)(n-1)}{12}-\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{d_i}^2}{\dfrac{n^2-1}{12}}$$

$$=1-\frac{6}{\boxed{(n+1)n(n-1)}}\boxed{\sum_{i=1}^{n}{d_i}^2}\qquad\cdots\text{(う)(え) (答)}$$

(4)　相関係数の取り得る値の範囲は $-1\leqq r\leqq 1$ であるから, $r=1$ となればそれが最大値, $r=-1$ となればそれが最小値である.

(3) の答えの式より, r は $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{d_i}^2=0$ のときに限って $r=1$ となる. $d_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$ より

$y_i=\boxed{x_i}\quad(i=1,2,\cdots,n)$ のとき r は最大値 $\boxed{1}$ となる.　　　$\cdots$ (お)(か) (答)

$i=1,2,\cdots,n$ に対して $e_i=x_i+y_i-(n+1)$ とおく.

$$\sum_{i=1}^{n}{e_i}^2=\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2+\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2+\sum_{i=1}^{n}(n+1)^2+2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-2(n+1)\sum_{i=1}^{n}x_i-2(n+1)\sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i^2+(n+1)^2n+2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-2(n+1)\sum_{i=1}^{n}i-2(n+1)\sum_{i=1}^{n}i$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+(n+1)^2n+2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-2n(n+1)^2$$

$$=-\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

であるから,

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{e_i}^2.$$

① に代入して,

$$s_{xy}=-\frac{(n+1)(n-1)}{12}+\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}{e_i}^2.$$

よって,

$$r=\frac{-\dfrac{(n+1)(n-1)}{12}+\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{e_i}^2}{\dfrac{n^2-1}{12}}$$

$$=-1+\frac{6}{(n+1)n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}{e_i}^2.$$

これは, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{e_i}^2=0$ のときに限って $r=-1$ となる. $e_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$ より,

$y_i=\boxed{n+1-x_i}\quad(i=1,2,\cdots,n)$ のとき r は最小値 $\boxed{-1}$ となる.　　　$\cdots$ (き)(く) (答)

補足　相関係数 r が定義できるとき, r には, 次の性質がある.

$r=1\Longleftrightarrow(x_i,y_i)\quad(i=1,2,\cdots,n)$ が傾き正の一直線上にのる.

$r=-1\Longleftrightarrow(x_i,y_i)\quad(i=1,2,\cdots,n)$ が傾き負の一直線上にのる.

このことを知っていれば, 本問の後半は, 前半が解けなくても正答を書くことができる.

[Ⅲ]

xyz 空間で $\mathrm{B}(0,1,h)$ とし，$\mathrm{Q}(x,y,0)$ に対して $\mathrm{R}(x,y,g)$ とする．

$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{QPR}$ は $\tan\angle\mathrm{APB}=\tan\angle\mathrm{QPR}$ と同値で，$\dfrac{h}{\mathrm{AP}}=\dfrac{g}{\mathrm{PQ}}$.

すなわち，$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=h:g$ である．以下，xy 平面で考える．

(1) $\mathrm{P}(s,t)$ として，$\sqrt{s^2+(t-1)^2}:\sqrt{(s-T)^2+(t-1)^2}=h:g$.

これを整理して，$\left(s-\dfrac{h^2T}{h^2-g^2}\right)^2+(t-1)^2=\dfrac{g^2h^2T^2}{(h^2-g^2)^2}$ を得る．

よって，点 P の軌跡は

中心が $\left(\boxed{\dfrac{h^2T}{h^2-g^2}},\ \boxed{1}\right)$ で半径が $\boxed{\dfrac{ghT}{|h^2-g^2|}}$ の円．　… (あ)(い)(う) (答)

(2) $\mathrm{P}(0,t)$ として，$|t-1|:\sqrt{x^2+(t-y)^2}=h:g$.

すなわち，$(h^2-g^2)t^2-2(h^2y-g^2)t+h^2(x^2+y^2)-g^2=0$.

この方程式を満たす実数 t がただ 1 つとなる条件は判別式 D_1 について，

$\dfrac{D_1}{4}=(h^2y-g^2)^2-(h^2-g^2)\{h^2(x^2+y^2)-g^2\}=0$.

すなわち，$h^2\{g^2(y-1)^2-(h^2-g^2)x^2\}=0$.

$h>0$ より，$g^2(y-1)^2=(h^2-g^2)x^2$ であり，これを満たす実数 x,y が存在するために $h,g\ (h\neq g)$ が満たすべき条件は $h^2>g^2$ すなわち $\boxed{h>g}$.　… (え) (答)

このとき，$g(y-1)=\pm\sqrt{h^2-g^2}x$ より，

$y=\boxed{\pm\dfrac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x+1}$.　… (お)(か) (答)

(3) $\mathrm{P}(t,0)$ として，$\sqrt{t^2+1}:\sqrt{(t-x)^2+y^2}=h:g$.

すなわち，$(h^2-g^2)t^2-2h^2xt+h^2(x^2+y^2)-g^2=0$.

これを満たす実数 t がただ 1 つとなる条件は，判別式 D_2 に対して

$\dfrac{D_2}{4}=g^2h^2x^2+(g^2h^2-h^4)y^2-g^4+g^2h^2=0$.

すなわち，$\boxed{\dfrac{h^2}{g^2-h^2}}x^2+\boxed{0}x+\boxed{\dfrac{h^2}{g^2}}y^2+\boxed{0}y=1$　… (き)〜(こ) (答)

C が楕円となるのは $g^2-h^2>0$ すなわち $\boxed{g>h}$ のとき．　… (さ) (答)

このとき，焦点は $\left(0,\ \pm\sqrt{\dfrac{g^2}{h^2}-\dfrac{g^2-h^2}{h^2}}\right)$,

すなわち，$\boxed{(0,\ \pm1)}$.　… (し)〜(そ) (答)

$g<h$ のとき C は双曲線であり，焦点は $\boxed{(0,\ \pm1)}$.　… (た)〜(て) (答)

C が直角双曲線のとき，$g^2-h^2=-g^2$ であるから，$\dfrac{h^2}{g^2}=2$ である．

よって，$\dfrac{h}{g}=\boxed{\sqrt{2}}$.　… (と) (答)

[Ⅲ](つづき１)

(別解)

点A，点Qに立っている塔の先端をそれぞれ点H，Gとおく．

$\angle \mathrm{APH}=\angle \mathrm{QPG}$，$\angle \mathrm{PAH}=\angle \mathrm{PQG}$であるから，$\triangle \mathrm{APH} \backsim \triangle \mathrm{QPG}$である．したがって，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{QP}=\mathrm{AH}:\mathrm{QG}=h:g.$$

ゆえに点Pは，A，Qからの距離の比が$h:g$となる点である．線分AQを$h:g$に内分する点をM，線分AQを$h:g$に外分する点をNとおくと，点Pの軌跡は，2点M，Nを直径の両端とする円である．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$とおくとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{g\vec{a}+h\vec{q}}{h+g},\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{-g\vec{a}+h\vec{q}}{h-g}$$

であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=2gh\cdot\frac{\vec{q}-\vec{a}}{h^2-g^2}.$$

点Pが描く円の半径rは$r=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|$である．また，線分MNの中点をCとすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}})=\frac{-g^2\vec{a}+h^2\vec{q}}{h^2-g^2}.$$

(1)　$\vec{q}=\begin{pmatrix}T\\1\end{pmatrix}$のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}x_{\mathrm{C}}\\y_{\mathrm{C}}\end{pmatrix}$とおけば，$x_{\mathrm{C}}=\frac{h^2T}{h^2-g^2}$，$y_{\mathrm{C}}=1$であるから，中心の座標は，

$$\left(\boxed{\frac{h^2T}{h^2-g^2}},\ \boxed{1}\right).$$

…(あ)(い)(答)

また，

$$r=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|=\frac{1}{2}\cdot 2gh\cdot\frac{T}{|h^2-g^2|}=\boxed{\frac{ghT}{|h^2-g^2|}}.$$

…(う)(答)

(2)　条件を満たすのは，円がy軸と接するときであるから，$|x_{\mathrm{C}}|=r$.

$$|x_{\mathrm{C}}|=\left|\frac{h^2x}{h^2-g^2}\right|,\quad r=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|=\frac{gh}{|h^2-g^2|}|\vec{q}-\vec{a}|$$

したがって，

$$h|x|=g|\vec{q}-\vec{a}|.$$

$$h^2x^2=g^2|\vec{q}-\vec{a}|^2.$$

$\vec{q}-\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}$であるから，

$$h^2x^2=g^2\{x^2+(y-1)^2\}.$$

$$g^2(y-1)^2=(h^2-g^2)x^2.$$

$h^2-g^2>0$つまり$\boxed{h>g}$が成り立ち，このとき

…(え)(答)

$$g(y-1)=\pm\sqrt{h^2-g^2}\,x.$$

$$y=\boxed{\frac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x+1},\quad y=\boxed{-\frac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x+1}.$$

…(お)(か)(答)

[Ⅲ](つづき２)

(3)　条件を満たすのは，$|y_C|=r$ を満たすときであるから，

$$\left|\frac{-g^2+h^2y}{h^2-g^2}\right|=\frac{gh}{|h^2-g^2|}|\vec{q}-\vec{a}|.$$

$$|-g^2+h^2y|=gh|\vec{q}-\vec{a}|.$$

$$(-g^2+h^2y)^2=g^2h^2\{x^2+(y-1)^2\}.$$

$$g^2h^2x^2+h^2(g^2-h^2)y^2=g^2(g^2-h^2).$$

$$\boxed{\frac{h^2}{g^2-h^2}}x^2+\boxed{0}x+\boxed{\frac{h^2}{g^2}}y^2+\boxed{0}y=1.$$

…(き)〜(こ) (答)

x^2 の係数が正のとき楕円であり，$g^2-h^2>0$．すなわち $\boxed{g>h}$ のときに楕円となる．　…(さ)(答)

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{g^2-h^2}}{h}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{g}{h}\right)^2}=1.$$

$a=\dfrac{\sqrt{g^2-h^2}}{h}$，$b=\dfrac{g}{h}$ とおけば，$a<b$ であるから，焦点は y 軸上にある．

焦点の座標を $(0,\ \pm c)$ $(c>0)$ とすると，

$$c=\sqrt{b^2-a^2}=1.$$

したがって，楕円 C の２つの焦点の座標は $(\boxed{0},\ \boxed{1})$，$(\boxed{0},\ \boxed{-1})$ である．

…(し)〜(そ)(答)

一方，$g<h$ のときは C は双曲線となる．

$$-\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{h^2-g^2}}{h}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{g}{h}\right)^2}=1.$$

$a'=\dfrac{\sqrt{h^2-g^2}}{h}$，$b'=\dfrac{g}{h}$ とおけば，焦点は y 軸上にあり，その座標を $(0,\ \pm c')$ $(c'>0)$ として，

$$c'=\sqrt{a'^2+b'^2}=1.$$

したがって，双曲線 C の２つの焦点の座標は $(\boxed{0},\ \boxed{1})$，$(\boxed{0},\ \boxed{-1})$ である．

…(た)〜(て)(答)

さらに，直角双曲線となるのは $a'=b'$ のときであり，

$$\left(\frac{\sqrt{h^2-g^2}}{h}\right)^2=\left(\frac{g}{h}\right)^2 \iff h^2=2g^2.$$

すなわち $\dfrac{h}{g}=\boxed{\sqrt{2}}$ のときである．　…(と)(答)

(別解終り)

[IV]

$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$f''(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ である．

したがって，$1+\{f'(x)\}^2=\{f(x)\}^2$，$f''(x)=f(x)$ である．

また，$f'(x)=\dfrac{(e^x+1)(e^x-1)}{2e^x}$ であるから，$x>0$ において $f'(x)>0$ となる．これより，$x>0$ において $f(x)$ は増加する．

さらに，$f(0)=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ であるから，$x>0$ における $f(x)$ のとり得る値の範囲は $f(x)>1$ である．

以上のことを踏まえて，以下の議論を行う．

点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ を中心とする半径 r の円周上に点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ があることから，

$$(t-X)^2+\{f(t)-Y\}^2=r^2. \qquad \cdots ①$$

さらに，点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ を中心とする半径 r の円の点 P における接線と曲線 C の点 P における接線が一致することから，直線 PQ は曲線 C の点 P における接線と垂直である．

したがって，$\dfrac{f(t)-Y}{t-X}\cdot f'(t)=-1$.

これより，

$$Y=f(t)+\frac{t-X}{f'(t)}. \qquad \cdots ②$$

② を ① に代入して整理すると，$(t-X)^2+\left\{-\dfrac{t-X}{f'(t)}\right\}^2=r^2$.

これより，$(t-X)^2=\dfrac{r^2\{f'(t)\}^2}{1+\{f'(t)\}^2}$ となるから，$(t-X)^2=\dfrac{r^2\{f'(t)\}^2}{\{f(t)\}^2}$.

$X<t$ より，$t-X>0$ であるから，$t-X=\dfrac{rf'(t)}{f(t)}$.

よって，$X=t-\dfrac{rf'(t)}{f(t)}$ となるから，

$$X=\boxed{t-\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}r}. \qquad \cdots(あ)(答)$$

$X=t-\dfrac{rf'(t)}{f(t)}$ を ② に代入して整理すると，$Y=f(t)+\dfrac{1}{f(t)}r$ となるから，

$$Y=\boxed{\frac{e^t+e^{-t}}{2}+\frac{2}{e^t+e^{-t}}r}. \qquad \cdots(い)(答)$$

[IV] (つづき1)

$X(t)=t-\dfrac{rf'(t)}{f(t)}$ において，

$$\frac{d}{dt}X(t)=1-r\cdot\frac{f''(t)f(t)-\{f'(t)\}^2}{\{f(t)\}^2}=1-r\cdot\frac{f(t)f(t)-[\{f(t)\}^2-1]}{\{f(t)\}^2}=1-\frac{r}{\{f(t)\}^2}\quad\cdots①$$

であるから，

$$\frac{d}{dt}X(t)=\frac{\{f(t)+\sqrt{r}\}\{f(t)-\sqrt{r}\}}{\{f(t)\}^2}.$$

$\sqrt{r}>1$ のとき，$f(t)=\sqrt{r}$ となる正の数 t がただ1つ存在し，その t の値を t_0 とおくと，$X(t)$ の $t>0$ における増減は次の表のようになる．

t	0	$\cdots$	t_0	$\cdots$
$\frac{d}{dt}X(t)$		$-$	0	$+$
$X(t)$	(0)	$\searrow$		$\nearrow$

$0<\sqrt{r}\leqq 1$ のとき，$t>0$ においてつねに $\dfrac{d}{dt}X(t)>0$ が成り立つから，$X(t)$ の $t>0$ における増減は次の表のようになる．

t	0	$\cdots$
$\frac{d}{dt}X(t)$		$+$
$X(t)$	(0)	$\nearrow$

したがって，すべての正の数 t に対して $X(t)>0$ となるための条件は，$0<\sqrt{r}\leqq 1$，すなわち，

$$\boxed{0<r\leqq 1}.\qquad\cdots(う)(答)$$

また，つねに $f(t)>0$，$\dfrac{1}{f(t)}r>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$f(t)+\frac{1}{f(t)}r\geqq 2\sqrt{f(t)\cdot\frac{1}{f(t)}r}$$

すなわち，

$$Y(t)\geqq 2\sqrt{r}.\qquad\cdots②$$

等号成立条件は $f(t)=\dfrac{1}{f(t)}r$ より，$\{f(t)\}^2=r$.

このこととつねに $f(t)>0$ であることから，$f(t)=\sqrt{r}$ であり，これより，$\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}=\sqrt{r}$.

したがって，$(e^t)^2-2\sqrt{r}e^t+1=0$ となり，これより，$r>1$ のとき，$e^t=\sqrt{r}\pm\sqrt{r-1}$ となる．

数学

[Ⅳ]（つづき2）

$r>1$ のとき，$\sqrt{r}+\sqrt{r-1}>1$ であり，$\sqrt{r}-\sqrt{r-1}=\dfrac{1}{\sqrt{r}+\sqrt{r-1}}$ より，$\sqrt{r}-\sqrt{r-1}<1$.

このことと $t>0$ において $e^t>1$ であることから，$e^t=\sqrt{r}+\sqrt{r-1}$.

これより，

$$t=\log\left(\sqrt{r}+\sqrt{r-1}\right). \qquad \cdots ③$$

②，③より，$0<r\leqq 1$ が成り立たないとき，すなわち，$r>1$ のとき，$Y(t)$ は，

$$t=\boxed{\log\left(\sqrt{r}+\sqrt{r-1}\right)} \qquad \cdots(え)(答)$$

において最小値

$$\boxed{2\sqrt{r}} \qquad \cdots(お)(答)$$

をとる．

$Y=f(t)+\dfrac{1}{f(t)}r$ において，

$$\frac{d}{dt}Y=f'(t)-\frac{f'(t)}{\{f(t)\}^2}r=f'(t)\left[1-\frac{r}{\{f(t)\}^2}\right]=f'(t)\cdot\frac{\{f(t)+\sqrt{r}\}\{f(t)-\sqrt{r}\}}{\{f(t)\}^2} \qquad \cdots ④$$

であるから，①，④より，$\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{f'(t)\left[1-\dfrac{r}{\{f(t)\}^2}\right]}{1-\dfrac{r}{\{f(t)\}^2}}=f'(t)$.

よって，

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2+1=\{f'(t)\}^2+1=\{f(t)\}^2. \qquad \cdots ⑤$$

ここで，$Y=f(t)+\dfrac{1}{f(t)}r$ において，$u=f(t)$ とおくと，$Y=u+\dfrac{1}{u}r$.

これより，$u^2-Yu+r=0$ となり，この u の2次方程式を解くと，

$$u=\frac{Y\pm\sqrt{Y^2-4r}}{2}. \qquad \cdots ⑥$$

また，関数 $\dfrac{d}{du}Y=1-\dfrac{1}{u^2}r=\dfrac{u^2-r}{u^2}=\dfrac{\left(u+\sqrt{r}\right)\left(u-\sqrt{r}\right)}{u^2}$ であるから，もし u が $u>0$ の範囲で変化するならば，Y の増減は次の表のようになる．

u	0	$\cdots$	$\sqrt{r}$	$\cdots$
$\dfrac{d}{du}Y$		$-$	0	$+$
Y		↘		↗

[Ⅳ]（つづき3）

いま，$u=f(t)\ (t>0)$ より，$u>1$ である．

よって，$0<r\leqq 1$ のとき，⑥の2つの u のうち，大きい方のみが $u>1$ を満たす．

以上より，$u=\dfrac{Y+\sqrt{Y^2-4r}}{2}$.

したがって，$f(t)=\dfrac{Y+\sqrt{Y^2-4r}}{2}$.

これを⑤に代入すると，

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2+1=\left(\frac{Y+\sqrt{Y^2-4r}}{2}\right)^2=\boxed{\frac{Y^2-2r+Y\sqrt{Y^2-4r}}{2}}. \quad \cdots(か)(答)$$