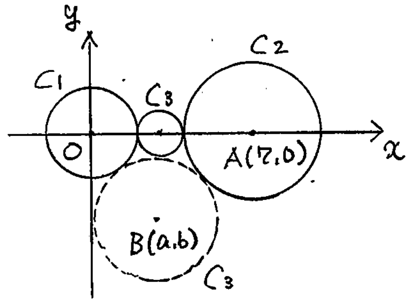
[1]

(1)



C_1の中心はO，C_2の中心をA(7,0)，

C_3の中心をB(a,b)とする．

rが最小となるのは左図のようにBがx軸上にありB(3,0)となるときである．

このときaも最大となり

rの最小値は $\boxed{1}$，　aの最大値は $\boxed{3}$．　…(1)(2)

(2) $\begin{cases} OB = 2+r \\ AB = 3+r \end{cases}$ から $\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} = 2+r \\ \sqrt{(a-7)^2+b^2} = 3+r \end{cases}$ が成り立つ．これらより

rを消去して　$\sqrt{a^2+b^2}-2=\sqrt{(a-7)^2+b^2}-3$，つまり

$$\sqrt{a^2+b^2}+1=\sqrt{(a-7)^2+b^2}$$

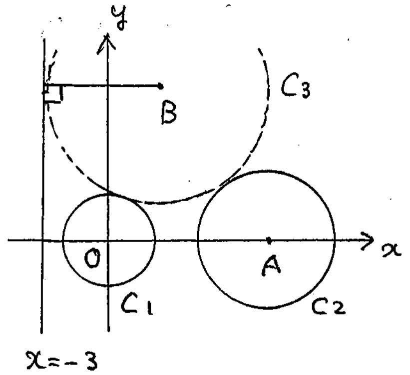
両辺ともに正なので2乗して整理すると，$\sqrt{a^2+b^2}=24-7a$．　$a \leqq 3$なので

両辺ともに正であり，$a^2+b^2=(24-7a)^2$．　よって，

$$b^2=(7a-24)^2-a^2=(7a-24+a)(7a-24-a)$$

$$=8(a-3)\cdot 6(a-4)=\boxed{4}\boxed{8}(a+\boxed{-3})(a-4)$$　…(3)(4), (5)(6)

(3)



C_3が$x=-3$と接するとき，Bは$x>-3$の領域にあり，

$$r=|a-(-3)|=a+3$$

(2)から$(\sqrt{a^2+b^2}=)\,2+r=24-7a$なので，

$$2+(a+3)=24-7a$$

[1]（つづき）

よって，$a = \dfrac{\boxed{1}\boxed{9}}{\boxed{8}}$．このとき，　…(7)(8)，(9)

$$b^2 = 48\left(\frac{19}{8}-3\right)\left(\frac{19}{8}-4\right) = 48\left(-\frac{5}{8}\right)\left(-\frac{13}{8}\right) = \frac{195}{4}$$

となるので，$|b| = \dfrac{\sqrt{\boxed{1}\boxed{9}\boxed{5}}}{\boxed{2}}$　…(10)〜(12)，(13)

(4)　$\overrightarrow{OB} = (a, b)$，$\overrightarrow{AB} = (a-7, b)$ で，条件より $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AB}$ なので $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

から，　$a(a-7)+b^2=0$　すなわち　$a^2-7a=-b^2$

一方，$b^2 = 48(a-3)(a-4) = 48(a^2-7a+12)$ なので，a^2-7a を

消去して，　$b^2 = 48(-b^2+12)$，　$49b^2 = 48\cdot 12$ から

$b^2 = \dfrac{24^2}{7^2}$ を得るので，　$|b| = \dfrac{\boxed{2}\boxed{4}}{\boxed{7}}$　…(14)(15)，(16)

[2]

得点を T とすると,

$$\text{(a) のとき}, T=0, \quad \text{(b) のとき}, T=1\times m+n+S=m+n+S$$

ただし,m,n は $0\leqq m\leqq 9, 2\leqq n\leqq 6$ を満たす整数であり,S は $m+2$ 回目から $m+n+1$ 回目までに出た数の合計とする.

$$\underbrace{1,1,1,\cdots,1}_{m\text{回}}\ n\ \underbrace{*,*,*,\cdots,*}_{n\text{回}} \qquad *=\{1,2,3,4,5,6\}$$

(1) $n\leqq 5$ とすると,

$$\begin{aligned} T&=m+n+S\\ &\leqq m+5+\underbrace{6+6+6+6+6}_{5\text{個}}\\ &=m+35. \end{aligned}$$

$0\leqq m\leqq 9$ より,$T\leqq 9+35=44$ となるから,$T=49$ となることはない. したがって,$T=49$ のとき,n のとる値は

$$\boxed{6}. \qquad \cdots(17)$$

$(T,n)=(49,6)$ のとき,$6\leqq S\leqq 36$ であるから,$12\leqq n+S\leqq 42$ より,$12\leqq 49-m\leqq 42$. これより,$7\leqq m\leqq 37$. $0\leqq m\leqq 9$ と共通範囲をとって,m のとり得る値の範囲は,

$$\boxed{7}\leqq m\leqq\boxed{9}. \qquad \cdots(18),(19)$$

(i) $(T, m, n)=(49, 7, 6)$ のとき.

$$\underbrace{1,1,1,\cdots,1}_{7\text{回}}\ 6\ \underbrace{6,6,6,6,6,6}_{6\text{回}}$$

と出るときであるから, このときの確率は,$\left(\frac{1}{6}\right)^7\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^6=\frac{1}{6^{14}}$.

(ii) $(T, m, n)=(49, 8, 6)$ のとき.

$$\underbrace{1,1,1,\cdots,1}_{8\text{回}}\ 6\ \underbrace{5,6,6,6,6,6}_{6\text{回}}$$

と出るときであるから, このときの確率は,$\left(\frac{1}{6}\right)^8\cdot\frac{1}{6}\cdot{}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^6=\frac{1}{6^{14}}$.

(iii) $(T, m, n)=(49, 9, 6)$ のとき.

$$\underbrace{1,1,1,\cdots,1}_{9\text{回}}\ 6\ \underbrace{5,5,6,6,6,6}_{6\text{回}}\ \text{または}\ \underbrace{1,1,1,\cdots,1}_{9\text{回}}\ 6\ \underbrace{4,6,6,6,6,6}_{6\text{回}}$$

と出るときであるから, このときの確率は,

$$\left(\frac{1}{6}\right)^9\cdot\frac{1}{6}\cdot{}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^6+\left(\frac{1}{6}\right)^9\cdot\frac{1}{6}\cdot{}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^6=\frac{21}{6^{16}}.$$

以上 (i),(ii),(iii) より,$T=49$ となる確率は,

$$\frac{1}{6^{14}}+\frac{1}{6^{14}}+\frac{21}{6^{16}}=\frac{\boxed{9}\boxed{3}}{6^{16}}. \qquad \cdots(20),(21)$$

[2](つづき)

さらに, さいころを投げる回数は (i) 14 回,(ii) 15 回,(iii) 16 回であるから, $T=49$ である条件のもとで, 投げる回数が 15 回以上である確率は,(ii),(iii) より,

$$\frac{1}{6^{14}}+\frac{21}{6^{16}}=\frac{\boxed{5}\boxed{7}}{6^{16}}. \quad \cdots(22),(23)$$

次に, $T=49$ である条件のもとで, 投げる回数が 14 以下である条件付き確率は,(i) より,

$$\frac{\frac{1}{6^{14}}}{\frac{93}{6^{16}}}=\frac{36}{93}=\frac{\boxed{1}\boxed{2}}{\boxed{3}\boxed{1}}. \quad \cdots(24)(25),(26)(27)$$

(2) さいころを投げる回数が 15 回以上となるのは,

$$m+n+1 \geqq 15 \text{ より}, m+n \geqq 14.$$

上式を満たす組は, $(m,\ n)=(9,\ 6),(9,\ 5),(8,\ 6)$ のいずれかである. その確率は,

$$\left(\frac{1}{6}\right)^9\cdot\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2+\left(\frac{1}{6}\right)^8\cdot\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{\boxed{8}}{6^{10}}. \quad \cdots(28)$$

ゆえに, さいころを投げる回数が 14 回以下である条件のもとで, 得点が 49 点となる条件付き確率は,

$$\frac{\frac{1}{6^{14}}}{1-\frac{8}{6^{10}}}=\frac{1}{6^4(6^{10}-\boxed{8})} \quad \cdots(30)$$

となるから,

$$k=\boxed{4}. \quad \cdots(29)$$

(3) $T=0$ となるのは (a) より,1 が 10 回連続して出るときであるから, その確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$. よって $T>0$ となる確率は $1-\frac{1}{6^{10}}$.

$T>0$ で, かつ, さいころを投げる回数が 14 回以下である確率は,15 回以上の確率を引いて,

$$1-\frac{1}{6^{10}}-\frac{8}{6^{10}}=1-\frac{9}{6^{10}}.$$

よって, 求める条件付き確率は,

$$\frac{\frac{1}{6^{14}}}{1-\frac{9}{6^{10}}}=\frac{1}{6^4(6^{10}-\boxed{9})} \quad \cdots(32)$$

となるから,

$$l=\boxed{4}. \quad \cdots(31)$$

[3]

$a_2=1$, $a_6=2$,

(*) $$S_n=\frac{(n-2)(n+1)^2}{4}a_{n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) (*) に $n=1$ を代入すると，

$$a_1=\frac{(-1)\cdot 2^2}{4}a_2=-\boxed{1}. \qquad \cdots(33)$$

(*) に $n=4$ を代入すると，

$$a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{2\cdot 5^2}{4}a_5.$$

$$a_3+a_4=\frac{25}{2}a_5. \qquad \cdots①$$

(*) に $n=5$ を代入すると，

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{3\cdot 6^2}{4}a_6.$$

$$a_3+a_4+a_5=54. \qquad \cdots②$$

①，② より，

$$\frac{25}{2}a_5+a_5=54 \iff a_5=\boxed{4}. \qquad \cdots(34)$$

このとき，$a_3+a_4=50$.　…③

さらに (*) に $n=3$ を代入すると，

$$a_1+a_2+a_3=\frac{1\cdot 4^2}{4}a_4.$$

$$a_3=4a_4.$$

したがって，③ より $a_3=\boxed{4}\boxed{0}$，$a_4=\boxed{1}\boxed{0}$ である．　…(35)〜(38)

(2) $n\geqq 2$ に対して，$a_n=S_n-S_{n-1}$ であるから，(*) とあわせて，

$$a_n=\frac{(n-2)(n+1)^2}{4}a_{n+1}-\frac{(n-3)n^2}{4}a_n.$$

$$(n-2)(n+1)^2a_{n+1}=\{(n-3)n^2+4\}a_n.$$

よって，

$$\left(n-\boxed{2}\right)\left(n+\boxed{1}\right)^2a_{n+1}=\left(n^3-\boxed{3}n^2+\boxed{4}\right)a_n. \qquad \cdots(39)\sim(42)$$

$$(n-2)(n+1)^2a_{n+1}=(n+1)(n-2)^2a_n.$$

$n\geqq 3$ のとき，$(n-2)(n+1)\neq 0$ であるから，

$$\left(n+\boxed{1}\right)a_{n+1}=\left(n-\boxed{2}\right)a_n. \qquad \cdots(43)(44)$$

両辺に $n(n-1)$ をかけると，

$$(n+1)n(n-1)a_{n+1}=n(n-1)(n-2)a_n$$

であるから，$b_n=n(n-1)(n-2)a_n$ とおけば，$b_{n+1}=b_n$ である．したがって，

$$r=\boxed{0},\quad s=\boxed{1},\quad t=\boxed{2}. \qquad \cdots(45)\sim(47)$$

[3] (つづき)

また，$b_3=3\cdot2\cdot1\cdot a_3=6a_3$ であるから，$n\geqq4$ に対して，

$$b_n=6a_3.$$

$$a_n=\frac{b_n}{n(n-1)(n-2)}=\frac{\boxed{6}\,a_3}{(n-r)(n-s)(n-t)}. \qquad \cdots(48)$$

これは，$n=3$ のときも成り立つ．

(3)　$n\geqq2$ のとき，$a_{n+1}=\dfrac{240}{(n+1)n(n-1)}$ であるから，(*) から

$$S_n=\frac{(n-2)(n+1)^2}{4}\cdot\frac{240}{(n+1)n(n-1)}$$

$$=\frac{\boxed{6}\,\boxed{0}\,(n+\boxed{1})(n-\boxed{2})}{n(n-\boxed{1})}. \qquad \cdots(49)\sim(53)$$

$S_n\geqq59$ とすると，

$$60(n-2)(n+1)\geqq59n(n-1).$$

$$\iff n(n-1)\geqq120.$$

$P_n=n(n-1)$ とおけば，自然数 n に対して P_n は単調に増加する．$P_{11}=110$，$P_{12}=132$ であるから，この不等式は $n\geqq12$ において成り立つ．したがって最小の n は $n=\boxed{1}\,\boxed{2}$ である．

$\cdots(54)(55)$

[4]

$$2\log_5 x-\log_5\left(6x-5^k\right)<k-1. \quad \cdots(\bigstar)$$

(1) $(\bigstar)$の真数の部分は正であるから，

$$x>0,\ 6x-5^k>0 \quad \text{すなわち} \quad x>\frac{5^k}{6}. \quad \cdots①$$

$(\bigstar)$より，

$$\log_5 x^2<\log_5\left(6x-5^k\right)+\log_5 5^{k-1} \quad \text{すなわち} \quad \log_5 x^2<\log_5\left(6x-5^k\right)5^{k-1}.$$

底は1より大きいから，

$$x^2<5^{k-1}\left(6x-5^k\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(x-5^{k-1}\right)\left(x-5^k\right)<0.$$

よって，

$$5^{k-1}<x<5^k. \quad (①\text{を満たす})$$

…(答)

(2) kが自然数のとき，$(\bigstar)$を満たす整数xは，

$$5^{k-1}+1,\ 5^{k-1}+2,\ 5^{k-1}+3,\ \cdots,\ 5^k-1$$

であり，$\left(5^k-1\right)-\left(5^{k-1}+1\right)+1=4\cdot5^{k-1}-1$(個)ある．

$5^{k-1}+1,\ 5^k-1$が偶数であることに注意すると，

$$a_k=\frac{\left(4\cdot5^{k-1}-1\right)-1}{2}=2\cdot5^{k-1}-1.$$

…(答)

また，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(2\cdot5^{k-1}-1\right)=2\cdot\frac{5^n-1}{5-1}-n=\frac{5^n-1}{2}-n.$$

…(答)

(3) $T_n=S_n+n$とすると，(2)より，$T_n=\dfrac{5^n-1}{2}$.

T_nが10桁の整数のとき，

$$10^9\leqq\frac{5^n-1}{2}<10^{10} \quad \text{すなわち} \quad 2\cdot10^9+1\leqq5^n<2\cdot10^{10}+1$$

が成り立ち，5^nは整数であるから，

$$2\cdot10^9<5^n\leqq2\cdot10^{10}.$$

よって，

$$\log_{10}2+9<n\left(1-\log_{10}2\right)\leqq\log_{10}2+10$$

であり，$1-\log_{10}2>0$より，

$$\frac{\log_{10}2+9}{1-\log_{10}2}<n\leqq\frac{\log_{10}2+10}{1-\log_{10}2}. \quad \cdots②$$

ここで，$0.30<\log_{10}2<0.31$を用いて，

$$\frac{0.30+9}{1-0.30}<\frac{\log_{10}2+9}{1-\log_{10}2}<\frac{0.31+9}{1-0.31}, \qquad \frac{0.30+10}{1-0.30}<\frac{\log_{10}2+10}{1-\log_{10}2}<\frac{0.31+10}{1-0.31}$$

$$13.28\cdots<\frac{\log_{10}2+9}{1-\log_{10}2}<13.49\cdots, \qquad 14.71\cdots<\frac{\log_{10}2+10}{1-\log_{10}2}<14.94\cdots$$

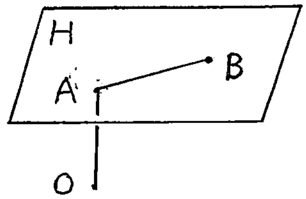
であるから，②より，

$$n=14.$$

…(答)

[5]

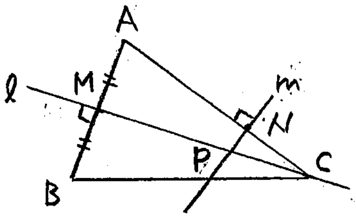
(1) $\overrightarrow{OA}$ が平面 H の法線ベクトルであることと，B が H 上の点であることから



$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OA}$，よって $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$

$(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ から $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}|^2$．よって $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 4$　…(答)

(2)



辺ABの中点をM，辺ACを 2：1 に内分する点をNとおく．平面H上において，

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \quad (s, t \text{ は実数})$$

とおける．このとき，

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \left(s - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AN} = s\overrightarrow{AB} + \left(t - \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AC}.$$

$\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{AB}$ かつ $\overrightarrow{NP} \perp \overrightarrow{AC}$ より，$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ かつ $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$．よって，

$$\begin{cases} \left(s - \frac{1}{2}\right)|\overrightarrow{AB}|^2 + t\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ s\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \left(t - \frac{2}{3}\right)|\overrightarrow{AC}|^2 = 0. \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} \left(s - \frac{1}{2}\right)4a^2 + t \cdot 2a^2 = 0, \\ s \cdot 2a^2 + \left(t - \frac{2}{3}\right)9a^2 = 0 \end{cases}$$

となる．$a^2 \neq 0$ から $2s + t = 1$ かつ $2s + 9t = 6$ を得て

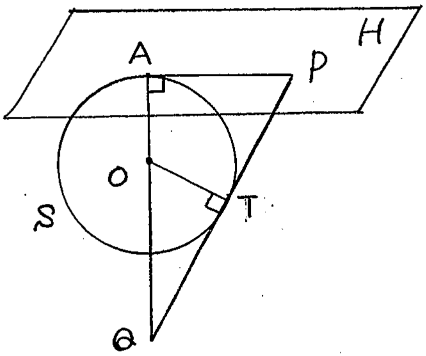
$s = \dfrac{3}{16}$，$t = \dfrac{5}{8}$．よって，$\overrightarrow{AP} = \dfrac{3}{16}\overrightarrow{AB} + \dfrac{5}{8}\overrightarrow{AC}$ から

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{16}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{16}\overrightarrow{OB} + \frac{5}{8}\overrightarrow{OC}$$

となり，$\alpha = \dfrac{3}{16}$，$\beta = \dfrac{3}{16}$，$\gamma = \dfrac{5}{8}$．　…(答)

[5]（つづき1）

(3)



$\overrightarrow{OQ}=-2\overrightarrow{OA}$ である．直線PQと球面Sの接点をTとすると，$OT=2$，$OQ=4$ から $\angle OQT=30^\circ$ である．

よって，直角三角形APQにおいて

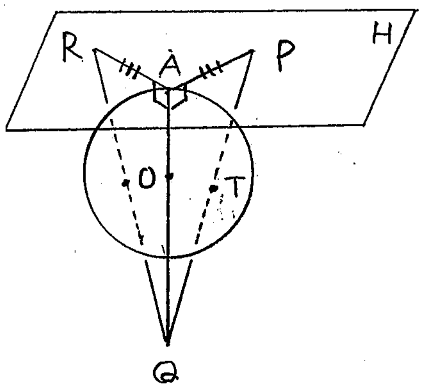
$|\overrightarrow{AP}|=\frac{1}{\sqrt{3}}|\overrightarrow{AQ}|=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 6=2\sqrt{3}$ …(答)

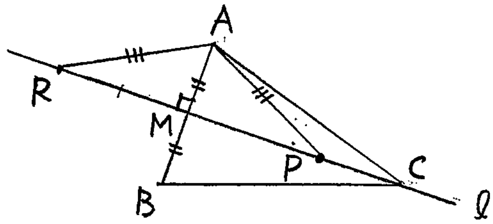
一方，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{16}(3\overrightarrow{AB}+10\overrightarrow{AC})$ であるから，

$$|\overrightarrow{AP}|^2=\frac{1}{16^2}\{9|\overrightarrow{AB}|^2+100|\overrightarrow{AC}|^2+60\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\}$$

$$=\frac{1}{16^2}(9\cdot 4a^2+100\cdot 9a^2+60\cdot 2a^2)=\frac{3\cdot 11}{8}a^2$$

よって，$(2\sqrt{3})^2=\frac{3\cdot 11}{8}a^2$ より $a^2=\frac{32}{11}$．$a>0$ より $a=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$ …(答)





また，明らかに $AP=AR$ であり，さらにRがℓ上にあることからRは辺ABに関してPと対称な点である．$AM=a$，$AP=2\sqrt{3}$ から

$$MP^2=AP^2-AM^2=12-\frac{32}{11}=\frac{10^2}{11}.\quad よって\ MP=\frac{10}{\sqrt{11}}$$

したがって△APRの面積は

$$\frac{1}{2}PR\cdot AM=\frac{1}{2}\cdot 2MP\cdot a=\frac{10}{\sqrt{11}}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{11}}=\frac{40\sqrt{2}}{11}$$ …(答)

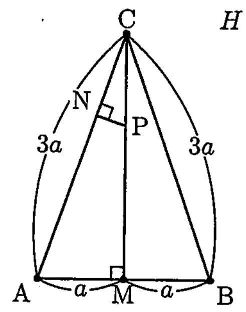
[5]（つづき 2）
(2) の別解

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．

三角形 ABC に余弦定理を用いて，

$$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$=4a^2+9a^2-2\cdot 2a^2$$
$$=9a^2.$$

よって，$|\overrightarrow{BC}|=3a$ であるから，三角形 ABC は，AC=BC の二等辺三角形である．したがって，ℓ は右図の直線 CM であり，P は直線 CM 上にあり，線分 AC を 2 : 1 に内分する点を N とすると，m は直線 PN となる．



$\theta=\angle\mathrm{ACM}$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{PC}}=\frac{a}{\mathrm{PC}}\text{ より},\ \mathrm{PC}=\frac{3}{2\sqrt{2}}a.$$

このとき，CM : PC$=2\sqrt{2}:\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=8:3$ より，P は線分 CM を 3 : 5 に内分する．したがって，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{5\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OM}}{3+5}$$
$$=\frac{5}{8}\vec{c}+\frac{3}{8}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$
$$=\frac{3}{16}\vec{a}+\frac{3}{16}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}.$$

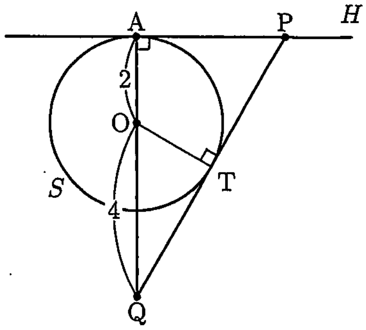
よって，

$$\alpha=\frac{3}{16},\ \beta=\frac{3}{16},\ \gamma=\frac{5}{8}.$$ …(答)

[5] (つづき3)

(3) $|\overrightarrow{AP}|$, a の値を求める別解

$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OQ}=\vec{0}$ より, $\overrightarrow{OQ}=-2\vec{a}$. よって, O は線分 AQ を 1 : 2 に内分する. 次に, O から線分 PQ に下ろした垂線の足を T とする. OT=2 であるから,



$$\sin\angle\mathrm{OQT}=\frac{1}{2}\text{より}, \angle\mathrm{OQT}=30^\circ.$$

このとき,

$$\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}\tan 30^\circ=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}. \qquad \cdots(\text{答})$$

ここで, 三平方の定理から,

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2&=\mathrm{AM}^2+\mathrm{PM}^2\\&=a^2+\left(2\sqrt{2}a\cdot\frac{5}{8}\right)^2\\&=\frac{33}{8}a^2\end{aligned}$$

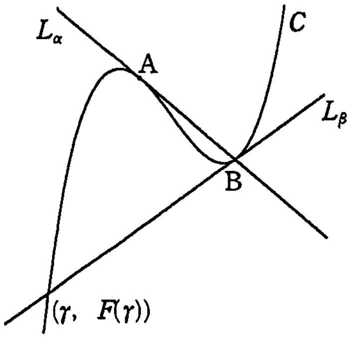
より,

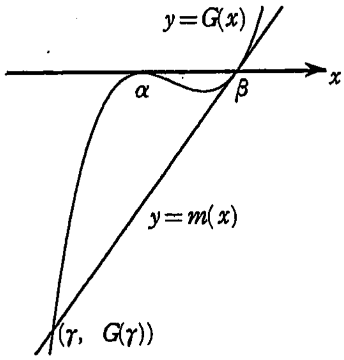
$$(2\sqrt{3})^2=\frac{33}{8}a^2.$$

よって,

$$a=\frac{4\sqrt{22}}{11}. \qquad \cdots(\text{答})$$

[6]





(1)　$C:y=F(x)$ と $L_\alpha:y=l_\alpha(x)$ は，点 A で接し点 B で交わるので，3 次方程式 $F(x)=l_\alpha(x)$ は，α を重解に，β を解にもつ．$F(x)$ の x^3 の係数が 1 であるから，

$$F(x)-l_\alpha(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta).$$

すなわち，

$$G(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta).$$
…(答)

これを x で微分すると，

$$G'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)^2=(x-\alpha)(3x-2\beta-\alpha).$$

したがって，$G'(\beta)=(\beta-\alpha)^2$ であり，$G(\beta)=0$ より，

$$m(x)=G'(\beta)(x-\beta)+G(\beta)=(\beta-\alpha)^2(x-\beta).$$
…(答)

(2)　$F(x)=G(x)+l_\alpha(x)$ であるから，$F'(x)=G'(x)+l_\alpha'(x)$．したがって，

$$L_\beta:y=F'(\beta)(x-\beta)+F(\beta).$$
$$y=\{G'(\beta)+l_\alpha'(\beta)\}(x-\beta)+\{G(\beta)+l_\alpha(\beta)\}.$$
$$y=G'(\beta)(x-\beta)+G(\beta)+l_\alpha'(\beta)(x-\beta)+l_\alpha(\beta).\quad\cdots①$$

接線 L_α の方程式を $l_\alpha(x)=ax+b$ とおけば，$l_\alpha'(x)=a$ であるから $l_\alpha'(\beta)=a$ であり，

$$l_\alpha'(\beta)(x-\beta)+l_\alpha(\beta)=a(x-\beta)+(a\beta+b)=ax+b.$$

したがって，

$$l_\alpha'(\beta)(x-\beta)+l_\alpha(\beta)=l_\alpha(x).\quad\cdots②$$

また，$y=G(x)$ 上の点 $(\beta,\ G(\beta))$ における接線の方程式は，

$$G'(\beta)(x-\beta)+G(\beta)=m(x).\quad\cdots③$$

①，②，③より

$$L_\beta:y=l_\alpha(x)+m(x).$$
(証明終り)

また，C と L_β は点 B で接し点 $(\gamma,\ F(\gamma))$ で交わるので，3 次方程式 $F(x)=l_\alpha(x)+m(x)$ は，β を重解に，γ を解にもつ．$F(x)=G(x)+l_\alpha(x)$ だから，

$$G(x)+l_\alpha(x)=l_\alpha(x)+m(x).$$
$$G(x)-m(x)=0.$$
$$(x-\alpha)^2(x-\beta)-(\beta-\alpha)^2(x-\beta)=0.$$
$$(x-2\alpha+\beta)(x-\beta)^2=0.$$

したがって，$\gamma=2\alpha-\beta$.
…(答)

[6] (つづき)

(3)　$\alpha<\beta$ より $2\alpha-\beta<\beta$ である．$2\alpha-\beta\leqq x\leqq\beta$ において，

$F(x)\geqq l_\alpha(x)+m(x)$ であるから，

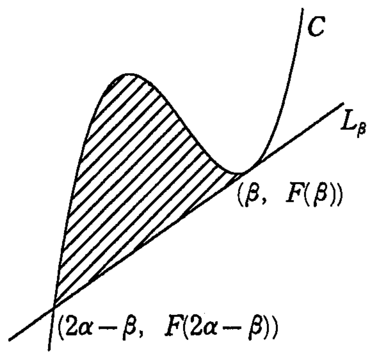
$$S=\int_{2\alpha-\beta}^{\beta}[F(x)-\{l_\alpha(x)+m(x)\}]dx$$

$$=\int_{2\alpha-\beta}^{\beta}(x-2\alpha+\beta)(x-\beta)^2dx$$

$$=\frac{1}{12}\{\beta-(2\alpha-\beta)\}^4$$

$$=\frac{4}{3}(\beta-\alpha)^4.$$

…(答)



また，$-1<\alpha<0$，$1<\beta<2$ のとき，$1<\beta-\alpha<3$ である．したがって，

$$\frac{4}{3}\cdot 1^4<S<\frac{4}{3}\cdot 3^4.$$

$$\frac{4}{3}<S<108.$$

…(答)