$\boxed{1}$

問1

$$\begin{array}{r|l} 2 & 6 \\ \hline 2 & 3 \cdots 0 \\ \hline 2 & 1 \cdots 1 \\ \hline & 0 \cdots 1 \end{array}$$

であり

$0.75 \times 2 = 1.5$

$0.5 \times 2 = 1$

であるから

$6.75 = 110.11_{(2)}$. …(答)

また, この数と

$101.0101_{(2)}$

との積は

$$\begin{array}{r} 101.0101 \\ \times \quad 110.11 \\ \hline 1010101 \\ 1010101 \\ 0000000 \\ 1010101 \\ 1010101 \\ \hline 100011.110111 \end{array}$$

より

$100011.110111_{(2)}$. …(答)

この数の4進法表示は

$100011.110111_{(2)}$

$= 2^5 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6}$

$= 2 \times 4^2 + 3 + 3 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4^2} + 3 \times \frac{1}{4^3}$

$= 203.313_{(4)}$. …(答)

1

問2

条件より

$$|\overrightarrow{OA}|=3,\ |\overrightarrow{OB}|=2,$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3\cdot2\cdot\cos60^\circ=3.$$

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とおく。
（s, tは実数）

OH⊥AB より

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

$$(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$$

$$s(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-|\overrightarrow{OA}|^2)+t(|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})=0$$

すなわち

$$-6s+t=0. \cdots ①$$

AH⊥OB より

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

$$(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

$$s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+t|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

すなわち

$$3s+4t-3=0. \cdots ②$$

①, ② より

$$s=\frac{1}{9},\ t=\frac{2}{3}.$$

よって

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}. \cdots(答)$$

$\boxed{2}$

$f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$,
$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$

とおく．

$f(x) = (x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$,

$-1 \leqq x \leqq -\frac{1}{2}$ において $f(x) \geqq 0$,

$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ において $f(x) \leqq 0$,

$F'(x) = f(x)$

であるから，

$$\int_{-1}^{1} \left| x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right| dx$$
$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \{-f(x)\}\,dx$$
$$= \Big[F(x) \Big]_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \Big[F(x) \Big]_{1}^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 2F\left(-\frac{1}{2}\right) - F(1) - F(-1)$$
$$= 2\left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{7}{24} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{19}{24}. \quad \cdots（答）$$

$\boxed{3}$

番号$n+1$の箱とは番号1の箱のことであるとすれば，操作(*)は$k=1,2,\cdots,n$に対して行なうと考えることができる．ここで，

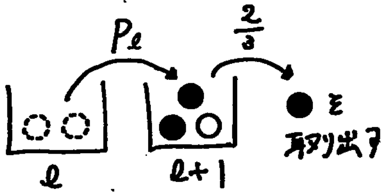
ℓ番目の操作で取り出された玉の色が，1番目の操作で取り出された玉の色と一致する事象をX_ℓとし，X_ℓの起こる確率をp_ℓとする．

$(\ell=1,2,\cdots,n)$

題意が成り立つのは事象X_nが起こるときであるので，求める確率はp_nである．

$\ell=1,2,\cdots,n-1$において，$X_{\ell+1}$が起こるのは，以下の(ア)，(イ)のいずれかが起こるときである．

(ア) X_ℓが起こり，$\ell+1$番目の操作で，1番目の操作で取り出されたのと同じ色の玉が取り出される

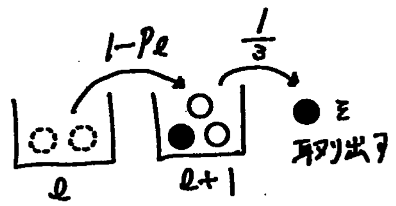


(●が1番目の操作で取り出された玉の色)

その確率は

$$\frac{2}{3}p_\ell$$

(イ) $\overline{X_\ell}$が起こり，$\ell+1$番目の操作で，1番目の操作で取り出されたのと同じ色の玉が取り出される．



その確率は

$$\frac{1}{3}(1-p_\ell)$$

(ア)，(イ)は互いに排反なので，

$$\begin{aligned} p_{\ell+1} &= \frac{2}{3}p_\ell + \frac{1}{3}(1-p_\ell) \\ &= \frac{1}{3}p_\ell + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

すなわち

$$p_{\ell+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_\ell - \frac{1}{2}\right)$$

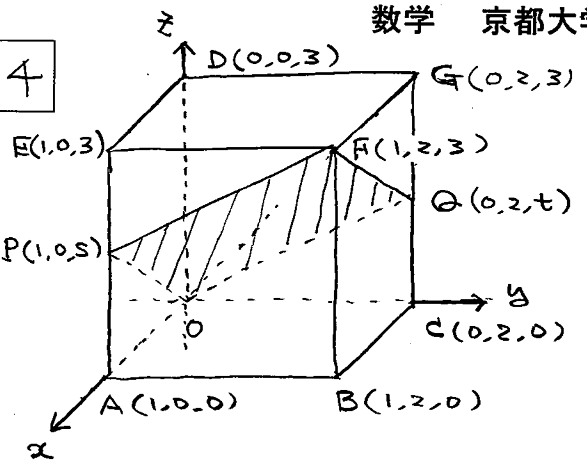
$(\ell=1,2,\cdots,n-1)$

$p_1=1$なので，

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{2} &= \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdots \text{(答)}$$

4



上図のように

P$(1, 0, s)$, Q$(0, 2, t)$とおく

$(0 \leqq s \leqq 3,\ 0 \leqq t \leqq 3)$ …①

平面ODEA // 平面CGFB,

平面OCGD // 平面ABFE

であり, O, F, P, Qが同一平面上にあるから 四角形OQFPは平行四辺形である. ゆえに

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QF}$$

すなわち

$$(1, 0, s) = (1, 0, 3-t)$$

$$s = 3 - t \quad \cdots ②$$

平行四辺形OQFPの面積は

$$S = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ})^2}$$

$$= \sqrt{(1+s^2)(4+t^2) - (st)^2}$$

$$= \sqrt{4+4s^2+t^2}$$

① かつ ②

すなわち

$$\begin{cases} t = 3 - s \\ 0 \leqq s \leqq 3 \end{cases}$$ より

$$S = \sqrt{4+4s^2+(3-s)^2}$$

$$= \sqrt{5s^2-6s+13}$$

$$= \sqrt{5\left(s-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{56}{5}}$$

$0 \leqq s \leqq 3$ より

$s = \frac{3}{5}$, $t = \frac{12}{5}$ （②より）

すなわち

P$\left(1, 0, \frac{3}{5}\right)$ …（答）

Q$\left(0, 2, \frac{12}{5}\right)$ …（答）

のとき Sは最小となり,

その値は

$$\sqrt{\frac{56}{5}} \quad \cdots（答）$$

$\boxed{5}$

・$p=2$ のとき．

$$2^4+14=30\ (=2\times3\times5)$$

は素数ではない．

・$p=3$ のとき

$$3^4+14=95\ (=5\times19)$$

も素数ではない

・$p\geqq5$ のとき．

このとき．p は 3 の倍数ではないから，3 を法として

$$p\equiv1 \text{ または } p\equiv-1$$

のいずれかで表すことができ，いずれの場合も

$$p^4+14\equiv(\pm1)^4+14$$
$$\equiv0$$

であるから，p^4+14 は 3 の倍数．

さらに，$p^4+14>3$ であるから．

これは素数ではない

以上より．p が素数ならば，p^4+14 は素数ではない．

（証明終り）