$\boxed{1}$

問1. $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,0,2)$ より,

平面 α に垂直なベクトルの1つは

$$\vec{n}=(2,-2,1).$$

これより, 平面 α の方程式は,

$$(2,-2,1)\cdot(x-1,y,z)=0$$

すなわち,

$$2x-2y+z=2. \quad \cdots ※$$

点Pから平面 α に下ろした垂線の足をHとおくと, t を実数として,

$$\overrightarrow{PH}=t\vec{n}$$

と表せる. Oを原点とする.

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+t\vec{n}$$
$$=(1,1,1)+t(2,-2,1)$$
$$=(2t+1,-2t+1,t+1).$$

Hは平面 α 上にあるから ※ より,

$$2(2t+1)-2(-2t+1)+(t+1)=2.$$
$$t=\frac{1}{9}.$$

これより, $\overrightarrow{PH}=\left(\frac{2}{9},-\frac{2}{9},\frac{1}{9}\right)$ であるから,

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PH}$$
$$=(1,1,1)+2\left(\frac{2}{9},-\frac{2}{9},\frac{1}{9}\right)$$
$$=\left(\frac{13}{9},\frac{5}{9},\frac{11}{9}\right).$$

以上より, 点Qの座標は,

$$Q\left(\frac{13}{9},\frac{5}{9},\frac{11}{9}\right). \quad \cdots (答)$$

問2. 1〜(n−1)回目の試行で赤以外の3色すべてが取り出され, n回目に赤が取り出される確率を求めればよい.

3つの事象A, B, Cを

1〜(n−1)回目の試行において,

A: 赤以外の1色のみを取り出す

B: 赤以外の2色のみを取り出す

C: 赤以外の玉を取り出す

とすると, 求める確率は,

$$\{P(C)-(P(A)+P(B))\}\times\frac{1}{4}$$

$$=\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-\left(3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+3\cdot\frac{2^{n-1}-2}{4^{n-1}}\right)\right\}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3}{4^n}. \quad \cdots (答)$$

2

$C : y=\frac{1}{2}(x^2+1).\ (y'=x)$

C上の点$P\left(t, \frac{1}{2}(t^2+1)\right)$におけるCの接線の方程式は

$$y=t(x-t)+\frac{1}{2}(t^2+1)$$
$$=tx-\frac{1}{2}(t^2-1)$$

であり，接線がx軸と交わるとき，その交点Qのx座標は

$$x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\ (t\neq 0).$$

よって，$Q\left(\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right), 0\right)$.

$$L^2=PQ^2$$
$$=\left\{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right\}^2+\left\{\frac{1}{2}(t^2+1)\right\}^2$$
$$=\frac{1}{4}(t^2+1)^2\left(\frac{1}{t^2}+1\right)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{(t^2+1)^3}{t^2}\ (t\neq 0)$$

$(s=t^2$とおくと$)$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{(s+1)^3}{s}.\ (s>0).$$

$f(s)=\frac{(s+1)^3}{s}\ (s>0)$とおくと，

$$f'(s)=\frac{3(s+1)^2\cdot s-(s+1)^3\cdot 1}{s^2}$$
$$=\frac{(s+1)^2(2s-1)}{s^2}.\ (s>0)$$

s	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(s)$		$-$	0	$+$
$f(s)$		↘	$\frac{27}{4}$	↗

したがって，Lの最小値は

$$\sqrt{\frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{4}.\quad\cdots(答)$$

3

部分和 S_n を

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{k\pi}{6}$$

とする。

$$z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

とおく.

$$z=\frac{\sqrt{3}+i}{4}\quad\cdots①$$

$$z^k=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\cos\frac{k\pi}{6}+i\sin\frac{k\pi}{6}\right)$$
$(k=0,1,2,\cdots)$

$$\sum_{k=0}^{n-1}z^k$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{k\pi}{6}+i\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\sin\frac{k\pi}{6}\quad\cdots②$$

②の左辺は

$$\frac{1-z^n}{1-z}=\frac{1}{1-z}-\frac{z^n}{1-z}\quad\cdots③$$

$$\frac{1}{1-z}=a+bi$$

$$\frac{z^n}{1-z}=c_n+d_ni$$

(a, b, c_n, d_n は実数)
$(n=1,2,3,\cdots)$

と表すと,

S_n は③の実部であるから

$$S_n=a-c_n$$

である.

$$a-S_n=c_n$$
$$|a-S_n|=|c_n|$$

$$\left|\frac{z^n}{1-z}\right|=\sqrt{c_n^2+d_n^2}\geqq|c_n|$$

$$\left|\frac{z^n}{1-z}\right|=\frac{|z|^n}{|1-z|}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{|1-z|}$$

であるから,

$$0\leqq|a-S_n|=|c_n|\leqq\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{|1-z|}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{|1-z|}=0$$

であるから, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n\to\infty}|a-S_n|=0$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=a$$

①により

$$\frac{1}{1-z}=\frac{4}{(4-\sqrt{3})-i}$$
$$=\frac{14+3\sqrt{3}+(5+2\sqrt{3})i}{13}$$ より.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}\quad\cdots(答)$$

4

$y=\log(1+\cos x)$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\sin x}{1+\cos x}$$

であり,

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$
$$=\sqrt{1+\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{(1+\cos x)^2+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{2(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{1+\cos x}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$
$$=\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}.$$

$\left(0 \leqq \frac{x}{2} \leqq \frac{\pi}{4}\right.$ より $\left.\cos\frac{x}{2}>0\right)$

よって, 求める長さを L とすると.

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos t}\cdot 2\,dt$$

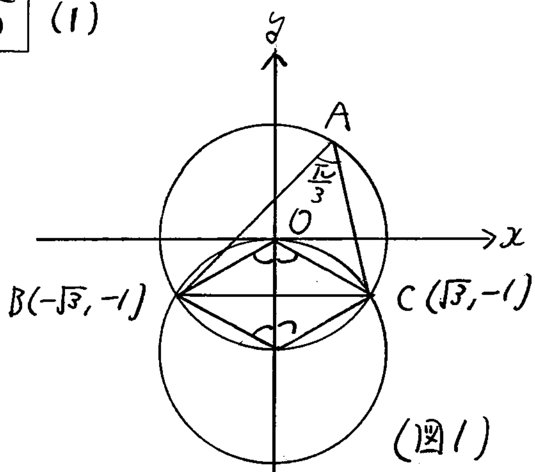
$\left(t=\frac{x}{2}\right.$ と置換$\left.\right)$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\cos^2 t}\,dt$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin t)'}{1-\sin^2 t}\,dt$$
$$=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1-u^2}\,du$$

($u=\sin t$ と置換)

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du$$
$$=\left[\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$=\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$
$$=2\log(\sqrt{2}+1).\quad\cdots(答)$$

$\boxed{5}$ (1)



(図1)

△ABCの外心をDとすると、Dは辺BCの垂直二等分線であるy軸上にあり、

$\angle BDC = 2\angle BAC = \frac{2}{3}\pi$

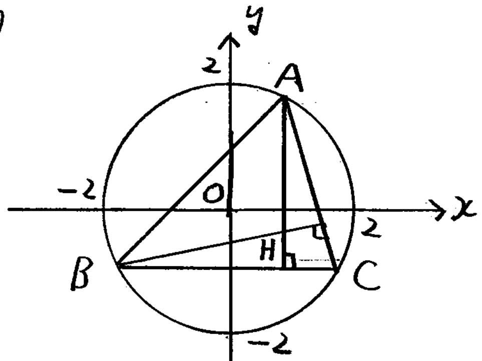
これを満たすy軸上の点は、

$(0, 0)$ と $(0, -2)$.

(*)より、点Aのy座標は正なので、(図1)から、求める外心の座標は、

$(0, 0)$ …(答)

(2)



$OB=2$ より、点Aは原点Oを中心とする半径2の円周上にあり、点Aが条件(*)を満たすとき、

$A(p, q)$

$p^2+q^2=4$ …①, $q>0$ …②

とおける。

このとき、△ABCの垂心Hの座標を$H(x, y)$とおくと、

$x=p$ …③

であり、$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ …④

ここで、

$\overrightarrow{BH}=(p+\sqrt{3}, y+1)$

$\overrightarrow{CA}=(p-\sqrt{3}, q+1)$

であるから、④より、

$(p+\sqrt{3})(p-\sqrt{3})+(y+1)(q+1)=0$

①より、$p^2=4-q^2$であるから、これを用いて整理すると、

$(q+1)y=(q+1)(q-2)$

②より、$q+1\neq 0$であり、

$y=q-2$ …⑤

③, ⑤より、

$p=x,\ q=y+2$.

①, ②に代入して、求める軌跡は

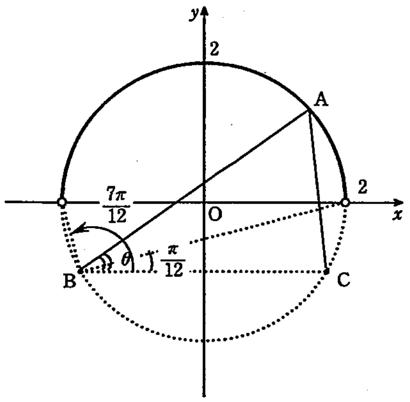
「円: $x^2+(y+2)^2=4$

の $y>-2$ を満たす部分」

…(答)

5 (2)の別解

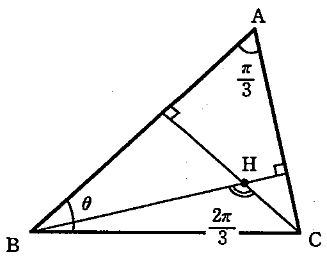
△ABCの垂心をH, ∠ABC$=\theta$とする.
点Aの軌跡は下図の太線部分のようになる.



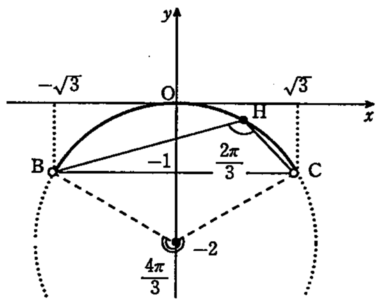
θのとりうる値の範囲は

$\frac{\pi}{12}<\theta<\frac{7\pi}{12}$.

(ア) △ABCが鋭角三角形, つまり
$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$のとき.
このとき点Hは下図のような位置に存在し, $\angle ABH=\frac{\pi}{6}$であるから,
$\angle BHC=\frac{2}{3}\pi$ (一定)

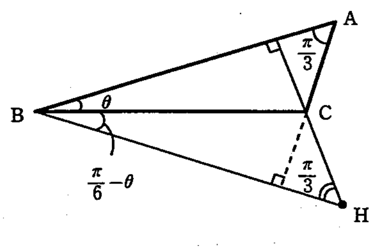


$\angle HBC\ (=\theta-\frac{\pi}{6})$のとりうる値の範囲は　$0<\angle HBC<\frac{\pi}{3}$.
このとき点Hは下図の太線部分を動く.



(イ) △ABCが直角三角形, つまり
$\theta=\frac{\pi}{6}$ または $\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき.
このとき点Hは, $\theta=\frac{\pi}{6}$のとき点C,
$\theta=\frac{\pi}{2}$のとき点Bに一致する

(ウ) △ABCが鋭角三角形, つまり
$\frac{\pi}{12}<\theta<\frac{\pi}{6}$ または $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{7\pi}{12}$のとき.
$\frac{\pi}{12}<\theta<\frac{\pi}{6}$のとき点Hは下図のような位置に存在し, $\angle ABH=\frac{\pi}{6}$であるから,
$\angle BHC=\frac{\pi}{3}$ (一定)

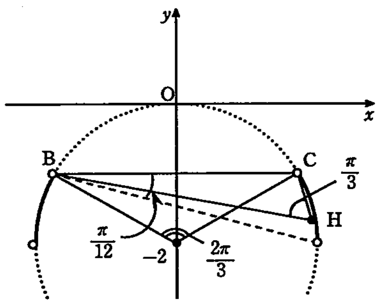


$\boxed{5}$ (2) 別解 つづき

このとき，$\angle HBC \left(= \frac{\pi}{6} - \theta\right)$ のとりうる値の範囲は

$$0 < \angle HBC < \frac{\pi}{12}.$$

これと，y軸に関する対称性から(ウ)のとき，点Hは下図の太線部分を動く．



以上(ア)〜(ウ)より，点Hは円 $x^2 + (y+2)^2 = 4$ の $y > -2$ を満たす部分を動く．

6

問1

対偶を示す．

n が素数でないとすると，

$n=pq$（p, q は $2 \leqq p \leqq q$ を満たす整数）と表せ，

$$3^n-2^n=(3^p)^q-(2^p)^q$$
$$=(3^p-2^p)\left((3^p)^{q-1}+(3^p)^{q-2}2^p+\cdots+(2^p)^{q-1}\right)$$
$$=(3-2)(3^{p-1}+3^{p-2}\cdot 2+3^{p-3}\cdot 2^2+\cdots+2^{p-1})$$
$$\times\left((3^p)^{q-1}+(3^p)^{q-2}2^p+\cdots+(2^p)^{q-1}\right).$$

$2 \leqq p \leqq q$ より

$$3^{p-1}+3^{p-2}\cdot 2+3^{p-3}\cdot 2^2+\cdots+2^{p-1} \geqq 5,$$
$$(3^p)^{q-1}+(3^p)^{q-2}2^p+\cdots+(2^p)^{q-1} \geqq 13$$

であるから，3^n-2^n は素数でない．

（証明終り）

問2

$$g(x)=\frac{f(x)}{x} \quad (x \neq 0)$$

とすると，$g(x)$ は微分可能であり，

$$g'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}.$$

$f(a)=af(1)$ より

$$g(a)-g(1)=0$$

であるから，平均値の定理より

$$g'(c)=0 \quad (1<c<a)$$

となる c が存在し，

$$f(c)-cf'(c)=0. \quad \cdots①$$

点 $(c, f(c))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式は

$$y=f'(c)x+f(c)-cf'(c)$$

であるから，①よりこれは原点 $(0, 0)$ を通る．

よって，曲線 $y=f(x)$ の接線で原点 $(0, 0)$ を通るものが存在する．

（証明終り）

（注）$f(x)$ の定義域に区間 $1<x<a$ が含まれると解釈した．