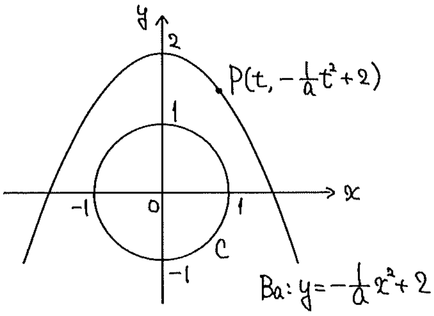
[1] (1)



$P\left(t, -\frac{1}{a}t^2+2\right)$ とおくと，

$$OP^2 = t^2 + \left(-\frac{1}{a}t^2+2\right)^2$$
$$= \frac{1}{a^2}t^4 + \left(1-\frac{4}{a}\right)t^2 + 4$$
$$= \frac{1}{a^2}\left(t^2 + \frac{a^2-4a}{2}\right)^2 - \frac{a^2-8a}{4}.$$

(ア) $-\frac{a^2-4a}{2} \leqq 0$ つまり $a \geqq 4$ のとき．

$t^2=0$ つまり $t=0$ のとき，

$(OP\text{の最小値}) = 2.$

(イ) $-\frac{a^2-4a}{2} > 0$ つまり $0<a<4$ のとき．

$t^2 = -\frac{a^2-4a}{2}$ のとき，

$(OP\text{の最小値}) = \frac{\sqrt{-a^2+8a}}{2}.$

(ア)(イ)より，

$$(OP\text{の最小値}) = \begin{cases} 2 & (a \geqq 4) \\ \frac{\sqrt{-a^2+8a}}{2} & (0<a<4) \end{cases}.$$

(2) B_a と C が共有点をもつ条件は，

$(OP\text{の最小値}) \leqq 1$

となることである．

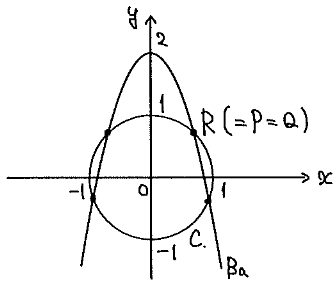
(1)より，$0<a<4$ のもとで，

$$\frac{\sqrt{-a^2+8a}}{2} \leqq 1$$
$$-a^2+8a \leqq 4$$
$$a^2-8a+4 \geqq 0$$
$$a \leqq 4-2\sqrt{3},\ 4+2\sqrt{3} \leqq a.$$

$0<a<4$ より，

$$0<a \leqq 4-2\sqrt{3}.$$

(3)(ウ) $0<a \leqq 4-2\sqrt{3}$ のとき．

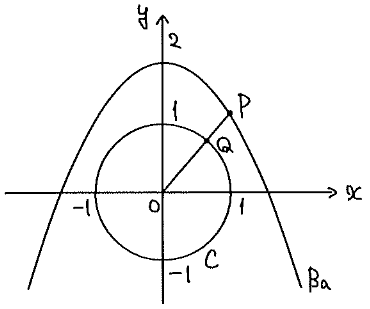


B_a と C は少なくとも2つの共有点をもつ．
これらのうちの1つを R とすると，P, Q が
R と一致するとき PQ は最小で，

$(PQ\text{の最小値}) = 0.$

次ページへ続く

(エ) $a > 4-2\sqrt{3}$ のとき.



B_a と C は共有点をもたない.

P を固定し, Q を動かすと, O, Q, P がこの順に一直線上に並ぶとき, PQ は最小となるから,

$$PQ = OP - OQ$$
$$= OP - 1$$

が最小となるときを考える.

(1) より,

$4-2\sqrt{3} < a < 4$ のとき,

$$(PQ の最小値) = \frac{\sqrt{-a^2+8a}}{2} - 1.$$

$a \geqq 4$ のとき,

$$(PQ の最小値) = 1.$$

(ウ), (エ) より,

$$(PQ の最小値) = \begin{cases} 0 & (0 < a \leqq 4-2\sqrt{3}) \\ \dfrac{\sqrt{-a^2+8a}}{2} - 1 & (4-2\sqrt{3} < a < 4) \\ 1 & (a \geqq 4) \end{cases}$$

[2]

$$m=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^2-m^2,$$

nが偶数のとき，$M=\dfrac{a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1}}{2}$.

(1)

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2\\&=\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2\\&=\sum_{k=1}^{n}(x^2-2a_kx+a_k^2)\\&=nx^2-2nmx+n(s^2+m^2)\\&=n(x-m)^2+ns^2.\end{aligned}$$

よって，

$x=m$ のとき，最小値 $f(m)=ns^2$.

(2) 一般に $a\leqq b$ のとき，

$$|x-a|+|x-b|=\begin{cases}-2x+a+b & (x\leqq a)\\ b-a & (a\leqq x\leqq b)\\ 2x-a-b & (x\geqq b)\end{cases}$$

であるから，

$|x-a|+|x-b|$ は $a\leqq x\leqq b$ で最小となる.

$g(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|$ について，

$|x-a_1|+|x-a_n|$ は $a_1\leqq x\leqq a_n$ で最小

$|x-a_2|+|x-a_{n-1}|$ は $a_2\leqq x\leqq a_{n-1}$ で最小

⋮

$|x-a_{\frac{n}{2}}|+|x-a_{\frac{n}{2}+1}|$ は $a_{\frac{n}{2}}\leqq x\leqq a_{\frac{n}{2}+1}$ で最小

よって，$g(x)$ は，

$a_{\frac{n}{2}}\leqq x\leqq a_{\frac{n}{2}+1}$ で最小となる.

nが偶数のとき $x=M$ は $a_{\frac{n}{2}}\leqq x\leqq a_{\frac{n}{2}+1}$ の範囲に含まれるから，$g(x)$ は $x=M$ で最小となる.

(3) (2)より，$g(x)$ は $a_{\frac{n}{2}}\leqq x\leqq a_{\frac{n}{2}+1}$ で最小となるから，$g(x)$ が最小値をとる x がただ一つであるための条件は，

$$a_{\frac{n}{2}}=a_{\frac{n}{2}+1}.$$

[3] (1)

$$\frac{1}{n+1} < \frac{b}{a} < \frac{1}{n}. \quad \cdots ①$$

$$\frac{b}{a} - \frac{1}{n+1} = \frac{d}{c} \quad \cdots ②$$

② より,

$$\frac{d}{c} = \frac{(n+1)b-a}{a(n+1)}$$

であり, 右辺が約分できるできないによらず

$$d \leqq (n+1)b-a. \quad \cdots ③$$

また, ① の右側の不等式より,

$$bn-a<0$$

$$(n+1)b-a<b. \quad \cdots ④$$

③, ④ より

$$d<b.$$

(2) $S=\frac{b}{a}$ (a, b は互いに素な自然数, $a>b$) とおく.

$b=1$ のとき, $n_1=a\ (>1)$ として

$$S=\frac{1}{n_1} \quad (1<n_1)$$

と表せる.

$b \geqq 2$ とする.

$$\frac{1}{n_1}<\frac{b}{a}<\frac{1}{n_1-1} \quad \cdots ⑤$$

を満たす n_1 に対して, 互いに素な自然数 c, d を用いて,

$$\frac{b}{a}-\frac{1}{n_1}=\frac{d}{c} \quad \cdots ⑥$$

と表せば,

$$S=\frac{1}{n_1}+\frac{d}{c}$$

と表せ, (1) より $d<b$.

さらに ⑤, ⑥ より,

$$0<\frac{b}{a}-\frac{1}{n_1}<\frac{1}{n_1-1}-\frac{1}{n_1}$$

$$0<\frac{d}{c}<\frac{1}{(n_1-1)n_1}.$$

すなわち,

$$0<\frac{d}{c}<\frac{1}{n_1}.$$

ここで $d=1$ であれば,

$$\frac{1}{c}<\frac{1}{n_1} \quad \text{つまり} \quad c>n_1$$

であるから, $n_2=c$ として

$$S=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2} \quad (1<n_1<n_2)$$

と表せる.

$d \geqq 2$ であれば,

$$\frac{1}{n_2}<\frac{d}{c}<\frac{1}{n_2-1}$$

を満たす n_2 に対して, 互いに素な自然数 e, f を用いて,

$$\frac{d}{c}-\frac{1}{n_2}=\frac{f}{e}$$

と表せば

$$S=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{f}{e} \quad (1<n_1<n_2)$$

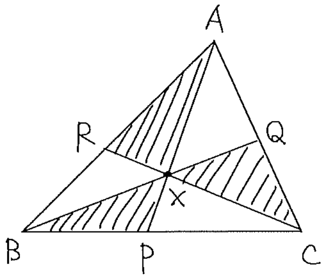
と表せ, (1) より $f<d\ (<b)$.

以下, n_2 の定め方と同様に $n_3, n_4, \cdots$ を定めれば, 最大でも $(b-1)$ 回の作業で

$$S=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_l} \quad (1<n_1<n_2<\cdots<n_l)$$

と表すことができる.

[4]



(1) $\overrightarrow{AX}=(s+t)\cdot\dfrac{s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}}{s+t}$

であるから,

$$\overrightarrow{AP}=\frac{s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}}{s+t}$$

であり,

$$\frac{AX}{XP}=\frac{s+t}{1-s-t},\quad \frac{PC}{BP}=\frac{s}{t}.$$

三角形ABPと直線CRにメネラウスの定理を用いると,

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PX}{XA}=1$$

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{s+t}{s}\cdot\frac{1-s-t}{s+t}=1$$

$$\frac{RB}{AR}=\frac{1-s-t}{s}.$$

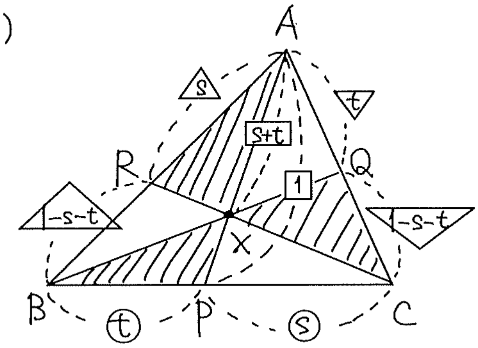
三角形ABCと点Xにチェバの定理を用いると,

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

$$\frac{s}{1-s-t}\cdot\frac{t}{s}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

$$\frac{QA}{CQ}=\frac{t}{1-s-t}.$$

(2)



$$\triangle BPX=(1-s-t)\triangle ABP$$

$$=(1-s-t)\cdot\frac{t}{s+t}$$

$$=\frac{(1-s-t)t}{s+t}.$$

$$\triangle CQX=\triangle BCQ-\triangle XBC$$

$$=\frac{1-s-t}{1-s}-(1-s-t)$$

$$=\frac{(1-s-t)s}{1-s}.$$

$$\triangle ARX=\frac{s}{1-t}\cdot(s+t)\triangle ABP$$

$$=\frac{s}{1-t}\cdot(s+t)\cdot\frac{t}{s+t}$$

$$=\frac{st}{1-t}$$

次ページへ続く

(3) $s=t$ のとき,

$$\triangle BPX = \frac{1-2s}{2},$$

$$\triangle CQX = \frac{(1-2s)s}{1-s},$$

$$\triangle ARX = \frac{s^2}{1-s}$$

より,

$$W = \frac{(1-2s)(1-s)+(1-2s)2s+2s^2}{2(1-s)}$$

$$= \frac{-s+1}{2(1-s)}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

(4) QがCAの中点のとき,

$$t = 1-s-t$$

$$s = 1-2t$$

であるから,

$$\triangle BPX = \frac{t^2}{1-t},$$

$$\triangle CQX = \frac{1-2t}{2},$$

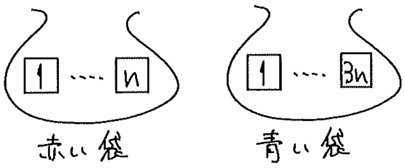
$$\triangle ARX = \frac{(1-2t)t}{1-t}$$

より,

$$W = \frac{2t^2+(1-2t)(1-t)+(1-2t)2t}{2(1-t)}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

[5]



(1) $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ の組を a_1, a_2 の値が大きい方の組から決める.

$a_1 = 2$, $a_2 = 1$ のとき,

b_1 は 3, 4, 5, 6 の 4 通り.

このとき,

b_2 は 2, 3, 4, 5, 6 のうち

b_1 の値を除いた 4 通り.

よって,

$$4 \times 4 = 16 \text{通り}.$$

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$ のときも同様だから,

$$P_2 = \frac{2 \times 16}{2! \, {}_6P_2} = \frac{8}{15}.$$

(2) $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \cdots, (a_n, b_n)$ の組を

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ の値が小さい順に

並べかえたものを

$(c_1, d_1), (c_2, d_2), \cdots, (c_n, d_n)$ とし,

添字の数字が大きい方の組から決める.

$c_n = n$ より,

d_n は $n+1, n+2, \cdots, 3n$ の $2n$ 通り.

次に $c_{n-1} = n-1$ より,

d_{n-1} は $n, n+1, \cdots, 3n$ のうち

d_n の値を除いた $2n$ 通り.

同様にして, $c_k = k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ より,

d_k は $k+1, k+2, \cdots, 3n$ のうち

$d_{k+1}, d_{k+2}, \cdots, d_n$ の値を除いた $2n$ 通り.

よって,

$$P_n = \frac{n!(2n)^n}{n! \, {}_{3n}P_n} = \frac{(2n)!(2n)^n}{(3n)!}.$$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \log (P_n)^{\frac{1}{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{(2n)!(2n)^n}{(3n)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{(2n)^n}{(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{2}{2n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{2n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log \frac{1}{\left(1+\frac{k}{2n}\right)}$$

$$= \int_0^1 \log \frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)} dx$$

$$= -\int_0^1 \log\left(1+\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= -\left[2\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)\log\left(1+\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\right\}\right]_0^1$$

$$= 1 - 3\log\frac{3}{2}.$$

(4) (3) より,

$$\lim_{n\to\infty} \log (P_n)^{\frac{1}{n}} = \log \frac{8}{27}e$$

であり, 対数関数の連続性と

単調性より,

$$\lim_{n\to\infty} (P_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{8}{27}e.$$