〔1〕

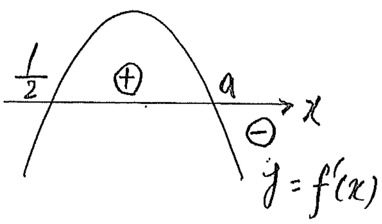
$$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{2a+1}{2}x^2-ax \quad \cdots ①$$

(1) ①より

$$f'(x)=-2x^2+(2a+1)x-a$$
$$=-(2x-1)(x-a).$$

$f'(x)=0$のとき

$$x=\frac{1}{2},\ a.$$



$x=a$で極大値をとることより, $f'(x)$の値は正から負に変わる.

よって, $y=f'(x)$のグラフより

$$a>\frac{1}{2}.$$

(2) $y=|x+1|+|x-2|$とおく.

(i) $x\leqq -1$のとき

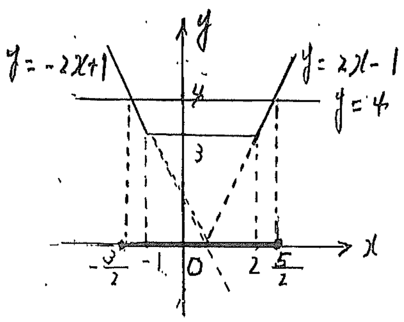
$$y=-(x+1)-(x-2)=-2x+1.$$

(ii) $-1\leqq x\leqq 2$のとき

$$y=(x+1)-(x-2)=3.$$

(iii) $2\leqq x$のとき

$$y=(x+1)+(x-2)=2x-1.$$



グラフより

$$-\frac{3}{2}\leqq x\leqq\frac{5}{2}.$$

(3)

$f(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2$ A

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{4}a+\frac{27}{8}$ B

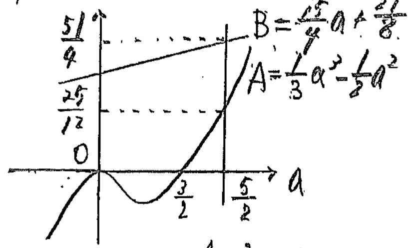
$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}a+\frac{1}{24}$ C

$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{15}{4}a-\frac{175}{24}$. D

(i) $\frac{1}{2}<a\leqq\frac{5}{2}$のとき

x	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	B	↘	C	↗	A	↘	D

（A, Bの大小関係について）



グラフより, $B>A$であり

$$(\text{最大値})=f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{4}a+\frac{27}{8}.$$

（C, Dの大小関係について）

$$C-D=-4a+\frac{22}{3}$$

$C-D\geqq 0\ (C\geqq D)$のとき, $a\leqq\frac{11}{6}$.

$C-D<0\ (C<D)$のとき, $a>\frac{11}{6}$.

すなわち,

$\frac{1}{2}<a\leqq\frac{11}{6}$のとき

$$(\text{最小値})=f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{15}{4}a-\frac{175}{24}.$$

$\frac{11}{6}<a\leqq\frac{5}{2}$のとき

$$(\text{最小値})=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}a+\frac{1}{24}.$$

(ii) $a > \frac{5}{2}$ のとき

x	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	B	$\searrow$	C	$\nearrow$	D

（B, D の大小関係について）

$B - D = \frac{32}{3} > 0$ より，$B > D$

であるから

$(\text{極大値}) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}a + \frac{27}{8}$．

また，増減表により

$(\text{極小値}) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{24}$．

以上より

・$\frac{1}{2} < a \leqq \frac{11}{6}$ のとき

$$\begin{cases} (\text{極大値}) = \frac{15}{4}a + \frac{27}{8} \\ (\text{極小値}) = \frac{15}{4}a - \frac{175}{24} \end{cases}$$

・$\frac{11}{6} < a$ のとき

$$\begin{cases} (\text{最大値}) = \frac{15}{4}a + \frac{27}{8} \\ (\text{極小値}) = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{24}. \end{cases}$$

[2]

(1) $B(b,\, b^2)$ とおくと

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (b-1,\ b^2-1) \\ \overrightarrow{CB} = (b-\sqrt{2}+1,\ b^2-\sqrt{2}-1) \end{cases}$$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CB}$ より

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)(b-\sqrt{2}+1) + (b^2-1)(b^2-\sqrt{2}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)\{(b-\sqrt{2}+1) + (b+1)(b^2-\sqrt{2}-1)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)(b^3+b^2-\sqrt{2}b-2\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)(b-\sqrt{2})\{b^2+(\sqrt{2}+1)b+2\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)(b-\sqrt{2}) \times \left\{\left(b+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 + \frac{5-2\sqrt{2}}{4}\right\} = 0$$

b は 1 と異なる実数であるから,

$$b = \sqrt{2}.$$

よって,

$$B(\sqrt{2},\ 2).$$

(2) $D(d,\ -\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2})$ とおくと

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (d-1,\ -\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2}-1) \\ \overrightarrow{CD} = (d-\sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}d^2+3d-1) \end{cases}$$

$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CD}$ より,

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$$

$$\Leftrightarrow (d-1)(d-\sqrt{2}+1) + (-\sqrt{2}d^2+3d-1)^2 + \sqrt{2}(-\sqrt{2}d^2+3d-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2d^4-6\sqrt{2}d^3 + (8+2\sqrt{2})d^2 + (2\sqrt{2}-6)d = 0$$

$$\Leftrightarrow d\{2d^3-6\sqrt{2}d^2 + (8+2\sqrt{2})d + (2\sqrt{2}-6)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2d(d-\sqrt{2}+1) \times \{d^2-(2\sqrt{2}+1)d+2\sqrt{2}+1\} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2d(d-\sqrt{2}+1) \times \left\{\left(d-\frac{2\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 + \frac{4\sqrt{2}-5}{4}\right\} = 0$$

d は $\sqrt{2}-1$ と異なる実数であるから

$$d = 0$$

よって,

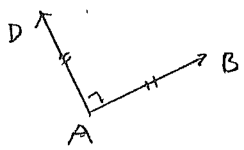
$$D(0,\ \sqrt{2})$$

(3) (1), (2) より

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (\sqrt{2}-1,\ 1) \\ \overrightarrow{AD} = (-1,\ \sqrt{2}-1) \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|. \\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0 \end{cases}$$



したがって, 四角形ABCDは正方形である.

[3]

(1) (b, c) の目の出方の総数は，

$$6^2 \text{（通り）}$$

あり，これらは同様に確からしい．

このうち，$b^2-4c>0$ を満たすものは，

$$(b,c)=(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),$$
$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),$$
$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)$$

の 17（通り）．

よって，求める確率は，

$$\frac{17}{36}.$$

(2) 2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，

$$D=b^2-4(-1)^a c$$

であり，このとき，求める条件は，$D>0$ が成り立つことである．

a が奇数のとき，$(-1)^a=-1$ より

$$D=b^2+4c$$

となり，$D>0$ はつねに成り立つ．

a が偶数のとき，$(-1)^a=1$ より，

$$D=b^2-4c.$$

$D>0$ のとき，

$$b^2>4c$$

であり，これは (1) の場合である．

以上より，求める確率は，

$$\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{17}{36}=\frac{53}{72}.$$

(3) $f(x)=(-1)^a x^2+bx+c$ より，

$$f'(x)=2(-1)^a x+b.$$

a が偶数のとき，

$$f'(1)=2+b$$

より，$f'(1)=1$ を満たす b は存在しない．

a が奇数のとき，

$$f'(1)=-2+b$$

より，$f'(1)=1$ のとき，

$$b=3.$$

よって，$f'(1)=1$ となる (b, c) の目の出方は

$$6 \text{（通り）}$$

より，$D>0$ かつ $f'(1)=1$ となる確率は，

$$\frac{1}{2}\times\frac{6}{36}=\frac{6}{72}\ \left(=\frac{1}{12}\right).$$

したがって，求める条件付き確率は，

$$\frac{\frac{6}{72}}{\frac{53}{72}}=\frac{6}{53}.$$

〔4〕

(1) $\sin 5x = \sin(3x+2x)$

$= \sin 3x\cos 2x + \cos 3x \sin 2x$

$= (3\sin x - 4\sin^3 x)(1-2\sin^2 x)$

$\quad + (4\cos^3 x - 3\cos x)2\sin x\cos x$

$= (3A-4A^3)(1-2A^2)$

$\quad + \{4(1-A^2)-3\}2A(1-A^2)$

$= A\{(3-4A^2)(1-2A^2)+2(1-4A^2)(1-A^2)\}$

$= A(16A^4-20A^2+5)$

$= 16A^5-20A^3+5A.$

(2) (1) より　$x=\frac{\pi}{5}$ のとき，

$\sin\left(5\cdot\frac{\pi}{5}\right) = 16A^5-20A^3+5A$,

$A(16A^4-20A^2+5)=0$. …①

ここで，$\sin^2\frac{\pi}{5}=A^2$ であり

$0<A^2<\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$.

① より

$\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}.$

(3) $\cos 7x = \cos 3x$ とおくと

$7x = \pm 3x + 2n\pi$ （nは整数）

とかける。

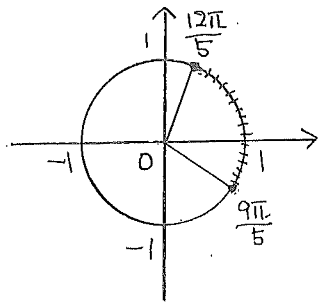
$x = \frac{n\pi}{2}, \frac{n\pi}{5}.$

よって，

$x_5 = \frac{3\pi}{5}$，$x_6 = \frac{4\pi}{5}$.

$\frac{3\pi}{5} \leqq x \leqq \frac{4\pi}{5}$ のとき

$\frac{3\pi}{2} < \frac{9\pi}{5} \leqq 3x \leqq \frac{12\pi}{5} < \frac{5\pi}{2}$.



(2) より

$\cos\frac{12}{5}\pi$

$= \cos\frac{2\pi}{5}$

$= 1-2\sin^2\frac{\pi}{5}$

$= 1-\frac{5-\sqrt{5}}{4}$

$= \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

よって，求める値域は

$\frac{\sqrt{5}-1}{4} \leqq y \leqq 1$.