〔1〕

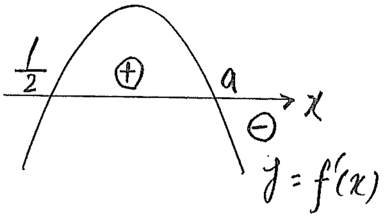
$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax \quad \cdots ①$$

(1) ①より

$$f'(x) = -2x^2 + (2a+1)x - a$$
$$= -(2x-1)(x-a).$$

$f'(x) = 0$ のとき

$$x = \frac{1}{2},\ a.$$




$x = a$ で極大値をとることより，$f'(x)$ の値は正から負に変わる。

よって，$y = f'(x)$ のグラフより

$$a > \frac{1}{2}.$$

(2) $y = |x+1| + |x-2|$ とおく。

(i) $x \leqq -1$ のとき

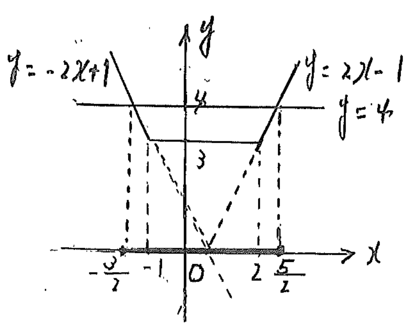
$$y = -(x+1) - (x-2) = -2x+1.$$

(ii) $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき

$$y = (x+1) - (x-2) = 3.$$

(iii) $2 \leqq x$ のとき

$$y = (x+1) + (x-2) = 2x-1.$$




グラフより

$$-\frac{3}{2} \leqq x \leqq \frac{5}{2}.$$

(3)

$f(a) = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2$　　A

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}a + \frac{27}{8}$　　B

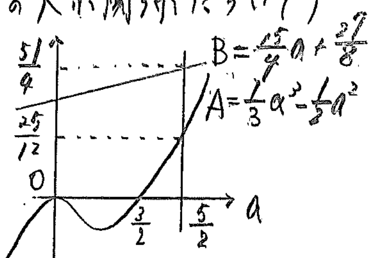
$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{24}$　　C

$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}a - \frac{175}{24}.$　　D

(i) $\frac{1}{2} < a \leqq \frac{5}{2}$ のとき

| $x$ | $-\frac{3}{2}$ $\cdots$ $\frac{1}{2}$ $\cdots$ $a$ $\cdots$ $\frac{5}{2}$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ $0$ $+$ $0$ $-$ |
| $f(x)$ | B ↘ C ↗ A ↘ D |

（A，B の大小関係について）




グラフより，$B > A$ であり

$$(\text{最大値}) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}a + \frac{27}{8}.$$

（C，D の大小関係について）

$$C - D = -4a + \frac{22}{3}$$

$C - D \geqq 0\ (C \geqq D)$ のとき，$a \leqq \frac{11}{6}$，

$C - D < 0\ (C < D)$ のとき，$a > \frac{11}{6}$.

すなわち，

$\frac{1}{2} < a \leqq \frac{11}{6}$ のとき

$$(\text{最小値}) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}a - \frac{175}{24}.$$

$\frac{11}{6} < a \leqq \frac{5}{2}$ のとき

$$(\text{最小値}) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{24}.$$

次ページに続く

(ii) $a > \frac{5}{2}$ のとき

| $x$ | $-\frac{3}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{5}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $B$ | $\searrow$ | $C$ | $\nearrow$ | $D$ |

（B, D の大小関係について）

$B - D = \frac{32}{3} > 0$ より，$B > D$

であるから

（最大値）$= f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}a + \frac{27}{8}$.

また，増減表により

（最小値）$= f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{24}$.

以上より

・$\frac{1}{2} < a \leqq \frac{4}{3}$ のとき

$$\begin{cases} (\text{最大値}) = \frac{15}{4}a + \frac{27}{8} \\ (\text{最小値}) = \frac{15}{4}a - \frac{175}{24} \end{cases}$$

・$\frac{4}{3} < a$ のとき

$$\begin{cases} (\text{最大値}) = \frac{15}{4}a + \frac{27}{8} \\ (\text{最小値}) = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{24}. \end{cases}$$

[2]

(1) $B(b,\ b^2)$ とおくと

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (b-1,\ b^2-1) \\ \overrightarrow{CB} = (b-\sqrt{2}+1,\ b^2-\sqrt{2}-1) \end{cases}$$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CB}$ より

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)(b-\sqrt{2}+1) + (b^2-1)(b^2-\sqrt{2}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)\{(b-\sqrt{2}+1) + (b+1)(b^2-\sqrt{2}-1)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)(b^3+b^2-\sqrt{2}b-2\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)(b-\sqrt{2})\{b^2+(\sqrt{2}+1)b+2\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)(b-\sqrt{2}) \times \left\{\left(b+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 + \frac{5-2\sqrt{2}}{4}\right\} = 0$$

$b$ は 1 と異なる実数であるから,

$$b = \sqrt{2}$$

よって,　$B(\sqrt{2},\ 2)$.

(2) $D(d,\ -\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2})$ とおくと

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (d-1,\ -\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2}-1) \\ \overrightarrow{CD} = (d-\sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}d^2+3d-1) \end{cases}$$

$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CD}$ より

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$$

$$\Leftrightarrow (d-1)(d-\sqrt{2}+1) + (-\sqrt{2}d^2+3d-1)^2 + \sqrt{2}(-\sqrt{2}d^2+3d-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2d^4-6\sqrt{2}d^3 + (8+2\sqrt{2})d^2 + (2\sqrt{2}-6)d = 0$$

$$\Leftrightarrow d\{2d^3-6\sqrt{2}d^2 + (8+2\sqrt{2})d + (2\sqrt{2}-6)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2d(d-\sqrt{2}+1) \times \{d^2-(2\sqrt{2}+1)d+2\sqrt{2}+1\} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2d(d-\sqrt{2}+1) \times \left\{\left(d-\frac{2\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 + \frac{4\sqrt{2}-5}{4}\right\} = 0$$

$d$ は $\sqrt{2}-1$ と異なる実数であるから

$$d = 0$$

よって,

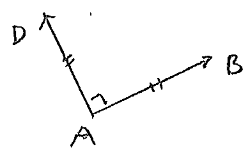
$$D(0,\ \sqrt{2})$$

(3) (1), (2) より

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (\sqrt{2}-1,\ 1) \\ \overrightarrow{AD} = (-1,\ \sqrt{2}-1) \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| \\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0 \end{cases}$$




したがって, 四角形ABCDは正方形である.

[3] (1) 組 $(b, c)$ の総数は 36 通りあり，これらは同様に確からしい．
このうち，$b^2>4c$ を満たす $(b, c)$ は，

| $b^2$ \ $4c$ | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 9 | ○ | ○ | | | | |
| 16 | ○ | ○ | ○ | | | |
| 25 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 36 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |

表の○をつけたところの 17 通り．
したがって，$b^2>4c$ である確率は，
$$\frac{17}{36}.$$

(2) (i) $a=1, 3, 5$ のとき，
$f(x)=-x^2+bx+c$ より，
$f(x)=0$ の判別式について，
$$D=b^2+4c,$$
$b$，$c$ は，さいころの目だから，
つねに，$D>0$ となり，
条件を満たす．よって，このときの確率は $a$ に着目して，
$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

(ii) $a=2, 4, 6$ のとき，
$f(x)=x^2+bx+c$ より，
$$D=b^2-4c.$$
このとき，(1) より，$D>0$ となる確率は，$(b, c)$ に着目すると，
$$\frac{17}{36}.$$
したがって，$(a, b, c)$ に着目すると，
$$\frac{1}{2}\times\frac{17}{36}=\frac{17}{72}.$$
(i) と (ii) は互いに排反だから，
求める確率は，
$$\frac{1}{2}+\frac{17}{72}=\frac{53}{72}.$$

(3) 次のように事象をおく．
E：$f(x)=0$ が異なる二つの実数解をもつ．
F：$f'(1)=7$ である．

このとき，求める条件付き確率は，
$$P_E(F)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}. \quad \cdots ①$$

(i) $a=1, 3, 5$ のとき，
$f(x)=-x^2+bx+c$ より，
$f'(x)=-2x+b$.
よって，$f'(1)=-2+b=7$.
$b=9$.
これを満たすさいころの目は存在しない．

(ii) $a=2, 4, 6$ のとき，
$f(x)=x^2+bx+c$ より，
$f'(x)=2x+b$.
よって，$f'(1)=2+b=7$.
$b=5$. $(b^2=25)$

(1) の表より，このとき，$b^2>4c$ を満たす確率は，$(b, c)$ に着目すると，
$$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$
よって，$(a, b, c)$ に着目すると，
$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}.$$

(i)，(ii) より，
$$P(E\cap F)=0+\frac{1}{12}=\frac{1}{12}.$$

次ページに続く

(2) の結果より，$P(E)=\frac{53}{72}$ だから，

①より，求める条件付き確率は，

$$P_E(F)=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{53}{72}}=\frac{6}{53}.$$

(4) 事象 G を，

G：$f(x)=0$ が少なくとも一つの正の解をもつ

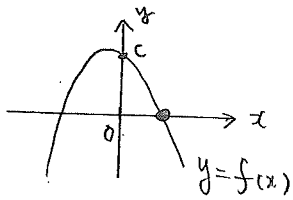
とおくと，求める条件付き確率は，(2)で設定した E も用いて，

$$P_E(G)=\frac{P(E\cap G)}{P(E)} \quad \cdots ②$$

(i) $a=1,3,5$ のとき，

$f(x)=-x^2+bx+c$.

このとき，$f(0)=c>0$ より




$f(x)=0$ は，つねに正の解を1つもち条件を満たす。

（このとき，$(b,c)$ は何でもよい。）

よって，このときの確率は，

$$\frac{1}{2}.$$

(ii) $a=2,4,6$ のとき，

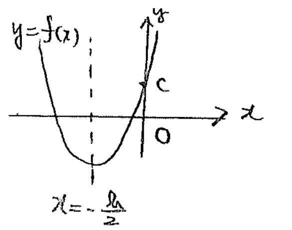
$f(x)=x^2+bx+c$ より，

$y=f(x)$ のグラフの軸は，

$x=-\frac{b}{2}<0$.（$b$ はさいころの目）

また，$f(0)=c>0$.（$c$ はさいころの目）

したがって，$y=f(x)$ のグラフは，次のようになり，




$f(x)=0$ は，正の解をもたない。

(i),(ii)より，

$$P(E\cap G)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}.$$

よって，②より，求める条件付き確率は，

$$P_E(G)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{53}{72}}=\frac{36}{53}.$$

[4] (1)　2次方程式 $x^2+x-(c-1)=0$ が実数解 $\alpha, \beta$ をもつことから，判別式

$D=1+4(c-1)>0$ より，$c>\frac{3}{4}$

である．このとき解の公式を用いて，

$$\alpha=\frac{-1-\sqrt{4c-3}}{2},\ \beta=\frac{-1+\sqrt{4c-3}}{2}.$$

さらにこれらを $a\alpha+b\beta+c=0$ に代入して整理すると，

$$-\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sqrt{4c-3}+c=0.$$

$a+b=c^2$ …① であるから

$$-\frac{c^2}{2}-\frac{a-b}{2}\sqrt{4c-3}+c=0.$$

これより　$b-a=\frac{c^2-2c}{\sqrt{4c-3}}$.

(2)　(1)より，$(b-a)\sqrt{4c-3}=c^2-2c$ …②

$\sqrt{4c-3}$ が自然数でないとき，これは無理数．このとき，$b-a\neq0$ と仮定すると

$\sqrt{4c-3}=\frac{c^2-2c}{b-a}$ となり，$\frac{c^2-2c}{b-a}$ は有理数であるから矛盾．よって $b-a=0$．

したがって，$c^2-2c=0$，$c\neq0$ より

$c=2$．$b-a=0$，$a+b=4$ より，$a=b=2$．

よって，$(a, b, c)=(2, 2, 2)$．

(3)　$a+b=c^2$ と $b-a=\frac{c^2-2c}{\sqrt{4c-3}}$ より

$b$ を消去して $c^2-2a=\frac{c^2-2c}{\sqrt{4c-3}}$.

$$c^2\sqrt{4c-3}-2a\sqrt{4c-3}=c^2-2c.$$

$4c-3=s^2$ を用いて整理すると，

$$\left(\frac{s^2+3}{4}\right)^2s-2as=\left(\frac{s^2+3}{4}\right)^2-2\cdot\frac{s^2+3}{4}.$$

$$s^5+6s^3+9s-32as$$
$$=s^4+6s^2+9-8s^2-24.$$
$$s^5-s^4+6s^3+2s^2+(9-32a)s=-15.$$

(4)　(3)より，

$$s\{s^4-s^3+6s^2+2s+9-32a\}=-15. \quad \text{…③}$$

$s$ と $s^4-s^3+6s^2+2s+9-32a$ は整数であるから．$s$ は15の正の約数である．

したがって，$s=1, 3, 5, 15$ のいずれか．

(i) $s=1$ のとき，$c=1$，③より $a=1$，②より，$b=0$．これは矛盾．

(ii) $s=3$ のとき，$c=3$．③より $a=4$，②より，$b=5$．

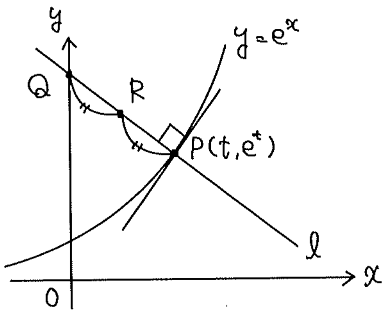
(iii) $s=5$ のとき，$c=7$．①，②より，$a=21$，$b=28$．

(iv) $s=15$ のとき，$c=57$．①②より，$a=1520$，$b=1729$．

(i)〜(iv)より求める組 $(a, b, c)$ は

$(4, 5, 3)$ $(21, 28, 7)$ $(1520, 1729, 57)$．

［5］(A)




(1) $y=e^x$ より，$y'=e^x$ であるから，$l$ の方程式は

$$y-e^t=-e^{-t}(x-t)$$

より，

$$l:\ y=-e^{-t}x+te^{-t}+e^t.$$

(2) (1)の $l$ の方程式から，

$$Q\left(0,\ te^{-t}+e^t\right)$$

であるから，線分PQの中点Rは，

$$R\left(\frac{t}{2},\ \frac{te^{-t}+2e^t}{2}\right).\quad (t=0\text{でも成り立つ})$$

R(X, Y)とおくと，

$$X=\frac{t}{2}\ \cdots①\ ,\ Y=\frac{te^{-t}+2e^t}{2}\ \cdots②$$

①から $t=2X$．これと②より，R(X, Y)は

$$Y=Xe^{-2X}+e^{2X}$$

を満たす．よってCの方程式は

$$C:\ y=xe^{-2x}+e^{2x}.$$

(3) $f(x)=xe^{-2x}+e^{2x}$ とおく．

$$f'(x)=e^{-2x}(2e^{4x}-2x+1)$$

ここで，$g(x)=2e^{4x}-2x+1$ とおくと，

$$g'(x)=8e^{4x}-2$$
$$=8\left(e^{4x}-\frac{1}{4}\right)$$

より，$g(x)$ の増減は次

| $x$ | $\cdots$ | $\log\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | ↘ | 極小 | ↗ |

$$g\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3}{2}+\log 2>0$$

とあわせて，すべての実数 $x$ で，$g(x)>0$

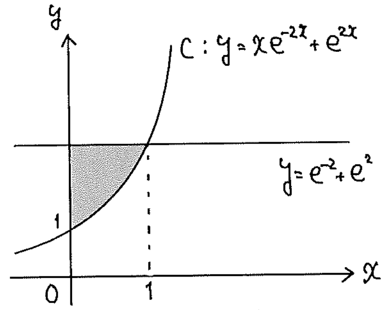
つまり，

$$f'(x)=e^{-2x}\cdot g(x)>0$$

となるので，$f(x)$ は単調増加．これと

$$f(1)=e^{-2}+e^2$$

から，求める面積は次図網掛け部分．




求める面積をSとすると，

$$S=(e^{-2}+e^2)\times 1-\int_0^1\left(xe^{-2x}+e^{2x}\right)dx$$
$$=e^{-2}+e^2-\left\{\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{2}e^{-2x}dx\right\}-\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$
$$=e^{-2}+e^2+\frac{1}{2}e^{-2}-\left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^1-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{4}e^{-2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{7}{4}e^{-2}+\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{4}.$$

次ページに続く

(4) 求める体積を$V$とすると，

$$V=\pi(e^{-2}+e^{2})^2-\pi\int_0^1(xe^{-2x}+e^{2x})^2dx$$

$$=\pi(e^{-2}+e^{2})^2-\pi\underbrace{\int_0^1x^2e^{-4x}dx}_{①}-\pi\underbrace{\int_0^1(2x+e^{4x})dx}_{②}$$

$$①=\left[-\frac{1}{4}x^2e^{-4x}\right]_0^1-\int_0^1 2x\cdot\left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{4}e^{-4}+\frac{1}{2}\int_0^1 xe^{-4x}dx$$

$$=-\frac{1}{4}e^{-4}+\frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{1}{4}xe^{-4x}\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{4}e^{-4x}dx\right\}$$

$$=-\frac{1}{4}e^{-4}+\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{4}e^{-4}+\left[-\frac{1}{16}e^{-4x}\right]_0^1\right\}$$

$$=-\frac{1}{4}e^{-4}-\frac{1}{8}e^{-4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{16}e^{-4}+\frac{1}{16}\right)$$

$$=-\frac{13}{32}e^{-4}+\frac{1}{32}.$$

$$②=\left[x^2+\frac{1}{4}e^{4x}\right]_0^1=1+\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}e^4+\frac{3}{4}$$

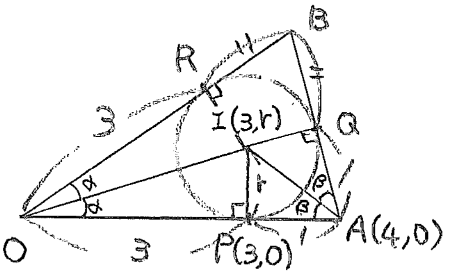
から，

$$V=\pi\left(e^{-4}+e^4+2+\frac{13}{32}e^{-4}-\frac{1}{32}-\frac{1}{4}e^4-\frac{3}{4}\right)$$

$$=\pi\left(\frac{45}{32}e^{-4}+\frac{3}{4}e^4+\frac{39}{32}\right).$$

[5] (B)

Cの中心をIとおくと，図のようになる．



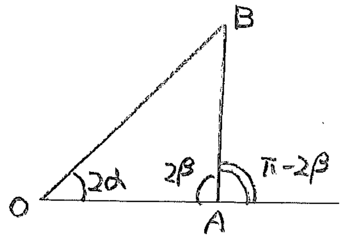

(1) 円Cと線分AB, OBとの接点をそれぞれQ, Rとおく．

OP=OR, AP=AQ, BQ=BRより，

$$\begin{aligned} OB-AB &= (OR+BR)-(AQ+BQ) \\ &= (OP+BQ)-(AP+BQ) \\ &= OP-AP \\ &= 3-1 \\ &= 2.\ (一定).\ ■ \end{aligned}$$

(2) $\begin{cases} \angle IOP=\alpha\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right), \\ \angle IAP=\beta\ \left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ とおく．

$$\tan\alpha=\frac{IP}{OP}=\frac{r}{3},\ \tan\beta=\frac{IP}{AP}=r.$$




直線OBと直線ABがy>0で交わることより，

$$2\alpha<\pi-2\beta.$$

よって，

$$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$$

であるから，

$$\tan(\alpha+\beta)>0.$$

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}>0.$$

$$\frac{4r}{3-r^2}>0.$$

r>0より，

$$0<r<\sqrt{3}.$$

(3) B(X, Y) (Y>0) とおく．

(1)より，

$$OB-2=AB.$$

$$\sqrt{X^2+Y^2}-2=\sqrt{(X-4)^2+Y^2}.$$

(左辺)>0より，　$X^2+Y^2>4.$

$$\left(\sqrt{X^2+Y^2}-2\right)^2=(X-4)^2+Y^2.$$

$$2X-3=\sqrt{X^2+Y^2}.$$

(左辺)>0より，　$X>\frac{3}{2}.$

$$(2X-3)^2=X^2+Y^2.$$

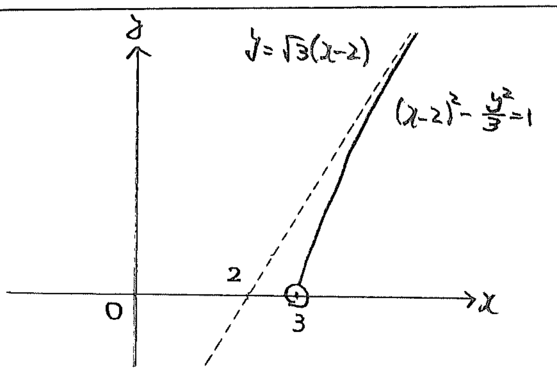
$$(X-2)^2-\frac{Y^2}{3}=1.$$

以上より，(2)の範囲で変化するとき，

求める軌跡は 双曲線 $(x-2)^2-\frac{y^2}{3}=1$

の $x>3$, $y>0$ の部分全体．

次ページに続く



y
$y=\sqrt{3}(x-2)$
$(x-2)^2-\frac{y^2}{3}=1$
2
0
3
x