$\boxed{1}$　　$f(x)=x^4+6x^3-24x^2.$

(1)
$$\begin{aligned} f'(x)&=4x^3+18x^2-48x\\ &=2x(2x^2+9x-24). \qquad \cdots ① \\ f''(x)&=12x^2+36x-48\\ &=12(x+4)(x-1). \end{aligned}$$

よって，$C: y=f(x)$ の凹凸を調べると次のようになる．

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	-512	$\cap$	-17	$\cup$

以上より，C の変曲点は
$$\boxed{(-4,\ -512),\ (1,\ -17)}. \qquad \cdots(答)$$

(2)　(1) の結果より $\mathrm{P}(1,\ -17)$.
$$f'(1)=-26$$
であるから，ℓ の方程式は
$$y=-26(x-1)-17$$
すなわち
$$\boxed{y=-26x+9}. \qquad \cdots(答)$$

(3)　① より，$f'(x)=0$ とすると
$$x=0,\ \frac{-9\pm\sqrt{273}}{4}.$$
ここで
$$\alpha=\frac{-9-\sqrt{273}}{4},\quad \beta=\frac{-9+\sqrt{273}}{4}$$
とおくと，$16<\sqrt{273}<17$ より
$$\alpha<-4<0<1<\beta$$
であり，$f(x)$ の増減は次のようになる．

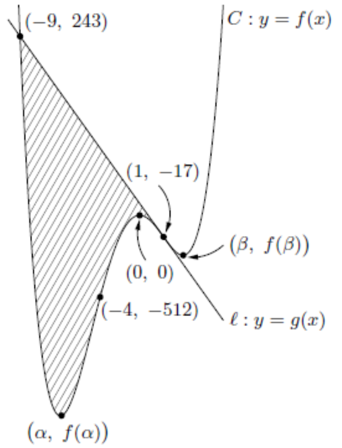
x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$g(x)=-26x+9$ とおくと
$$\begin{aligned} f(x)-g(x)&=x^4+6x^3-24x^2+26x-9\\ &=(x-1)^3(x+9) \end{aligned}$$
となるから

　　C と ℓ の共有点の x 座標は 1 と -9

であり
$x<-9,\ 1<x$ のとき
$$f(x)-g(x)>0 \quad つまり \quad f(x)>g(x),$$
$-9<x<1$ のとき
$$f(x)-g(x)<0 \quad つまり \quad f(x)<g(x)$$
である．

以上より，C と ℓ で囲まれた部分は下図の斜線部である．



図より，求める面積は
$$\begin{aligned} &\int_{-9}^{1}\{g(x)-f(x)\}\,dx\\ &=-\int_{-9}^{1}(x-1)^3(x+9)\,dx\\ &=-\int_{-9}^{1}\left\{(x-1)^4+10(x-1)^3\right\}dx\\ &=-\left[\frac{1}{5}(x-1)^5+\frac{5}{2}(x-1)^4\right]_{-9}^{1}\\ &=\frac{1}{5}\cdot(-10)^5+\frac{5}{2}\cdot(-10)^4\\ &=\boxed{5000}. \qquad \cdots(答) \end{aligned}$$

2 (1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\frac{1}{2}\{1-\cos\theta-\sqrt{3}(\tan\theta-\sin\theta)\},\ \frac{1}{2}\{\sqrt{3}(1-\cos\theta)+\tan\theta-\sin\theta\}\right),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\frac{1}{2}\{1+\cos\theta-\sqrt{3}(\tan\theta+\sin\theta)\},\ \frac{1}{2}\{\sqrt{3}(1+\cos\theta)+\tan\theta+\sin\theta\}\right)$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boxed{(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta,\ \sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)}.\qquad\cdots(答)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}=\boxed{\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}\tan\theta),\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}+\tan\theta)\right)}.\qquad\cdots(答)$$

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，(1) の結果より

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2\cos\theta}\left(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta,\ \sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta\right)$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2\cos\theta}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}.\qquad\cdots①$$

よって，直線 PQ と直線 OM は平行になるか，または一致する．これと，中点 M が直線 PQ と直線 OM の共有点であることから，直線 PQ と直線 OM は一致し，3 点 O, P, Q は同一直線上にある．（証明終り）

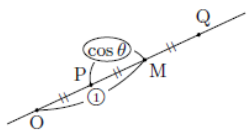
(3) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<\cos\theta<1$. このとき，① より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=1:2\cos\theta.$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$ より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|=1:\cos\theta.$$

さらに，① より $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ は同じ向きであることから，条件 $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|$ を満たすとき 4 点 O, P, M, Q はこの順に下の図のように等間隔に並ぶ．



図より

$$\cos\theta=\frac{1}{2}.$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\theta=\boxed{\frac{\pi}{3}}.\qquad\cdots(答)$$

<別解>

(1) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)=\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right),\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta}\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right),\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\boxed{2\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right),\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right)}.\qquad\cdots(答)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\boxed{\frac{1}{\cos\theta}\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right),\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right)}.\qquad\cdots(答)$$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1-\cos\theta}{2\cos\theta}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

より，3 点 O，P，Q は同一直線上にある．（証明終り）

(3) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<\cos\theta<1$.

このとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$ である．さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right),\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

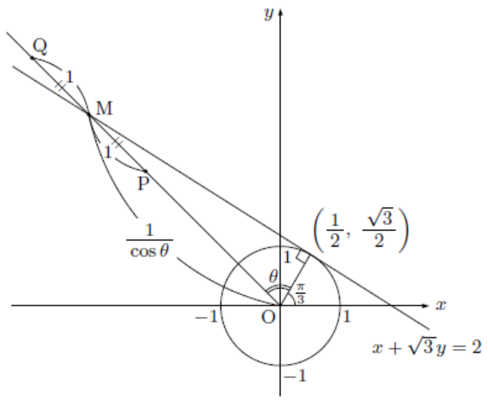
より $\left|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|=1$ なので，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|$ のとき

$$\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}=1.$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ となり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\theta=\boxed{\frac{\pi}{3}}.\qquad\cdots(答)$$

（参考）



上図のように点 M は円 $x^2+y^2=1$ の $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における接線 $x+\sqrt{3}y=2$ 上にあり，(3) では図の点 P が単位円周上にあるときの θ を求めている．

$\boxed{3}$ カードはすべて区別して考える．番号 1, 2, 3, 4 のカードが順に 1, 2, 3, 4 枚，計 10 枚入っているから，カードの引き方の総数は

$$10!\ \text{通り}$$

である．

(1)　10 枚目のカードの番号が 2, 3, 4 のとき，9 枚目までに 4 つすべての番号のカードが既に現れているので，A_{10} は起こらない．よって，A_{10} が起こるのは 10 枚目に番号 1 のカードを引くときである．番号 1 以外の残り 9 枚のカードを 1 枚目から 9 枚目まで引く引き方は

$$9!\ \text{通り}$$

あるから，A_{10} の起こる確率は

$$\frac{9!}{10!} = \boxed{\frac{1}{10}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　$A_9 \cap B_1$ が起こるのは，1 枚目から 8 枚目までに 1 以外のすべての番号のカードが現れ，9 枚目に番号 1 のカードを引くときである．

1 枚目	2 枚目		8 枚目	9 枚目	10 枚目
$\square$	$\square$	……	$\square$	$\boxed{1}$	$\square$

番号 2, 3, 4 のカードはいずれも 2 枚以上あり，10 枚目にどれを引いても 8 枚目までに 1 以外のすべての番号のカードが現れるので，$A_9 \cap B_1$ が起こる．

よって，9 枚目の番号 1 のカード以外の残り 9 枚のカードの引き方を考えると，求める $A_9 \cap B_1$ の起こる確率は

$$\frac{9!}{10!} = \boxed{\frac{1}{10}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(3)　A_9 が起こるとき，$A_9 \cap B_1$ 以外の A_9 の事象，つまり，9 枚目に 1 以外の番号のカードを引いて，そこで，初めて 4 つすべての番号が現れるときを考える．

番号 3, 4 のカードはいずれも 3 枚以上あり，9 枚目がどちらの番号のときも 8 枚目までに 4 つすべての番号が現れるので，A_9 は起こらない．

よって，9 枚目のカードの番号は 2 である．

1 枚目	2 枚目		8 枚目	9 枚目	10 枚目
$\square$	$\square$	……	$\square$	$\boxed{2}$	$\square$

このとき，さらに，10 枚目のカードの番号が 3 または 4 ならば，1 枚目から 8 枚目まで引く中のどこかで，すべての番号が現れることになり，A_9 は起こらない．

よって，10 枚目のカードの番号も 2 であり，このとき $A_9 \cap B_2$ が起こる．

1 枚目	2 枚目		8 枚目	9 枚目	10 枚目
$\square$	$\square$	……	$\square$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$

したがって，$A_9 \cap B_2$ の起こる確率は，9 枚目と 10 枚目の番号 2 のカードの引き方と，残り 8 枚のカードの 1 枚目から 8 枚目までの引き方を考えて

$$\frac{8! \cdot 2}{10!} = \frac{1}{45}.$$

また

$$A_9 = (A_9 \cap B_1) \cup (A_9 \cap B_2)$$

の起こる確率は，(2) の結果と合わせて

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{45} = \frac{11}{90}.$$

以上より，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{10}}{\frac{11}{90}} = \boxed{\frac{9}{11}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

$\boxed{4}$ (1)　整数 m は適当な整数 l を用いて

$$m = 2l \quad \text{または} \quad m = 2l + 1$$

のいずれかの形で表せる．

- $m = 2l$ のとき

$$m^2 = 4l^2. \qquad \cdots ①$$

- $m = 2l + 1$ のとき

$$m^2 = 4l(l+1) + 1. \qquad \cdots ②$$

①, ② より，m^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である．

（証明終り）

(2)

$$25 \times 3^n = k^2 + 176. \qquad \cdots (*)$$

自然数 n, k が $(*)$ を満たすとき $25 \cdot 3^n \geqq 176$ より $n \geqq 2$.
n が奇数であると仮定すると

$$n = 2l + 1 \quad (l = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と表せる．以下，合同式はすべて mod 4 とする．

- $$\begin{aligned} 25 \times 3^n &= 25 \times 3^{2l+1} \\ &= 25 \times 9^l \times 3 \\ &\equiv 1 \times 1^l \times 3 \\ &\equiv 3. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} k^2 + 176 &\equiv k^2 + 0 \\ &\equiv 0 \text{ または } 1. \quad ((1) \text{ より}) \end{aligned}$$

よって，$(*)$ の両辺をそれぞれ 4 で割った余りが一致せず矛盾．
以上より，自然数 n, k が $(*)$ を満たすとき，n は偶数である．

（証明終り）

(3)　(2) より $n = 2l$ $(l = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおける．このとき $(*)$ は

$$25 \times 3^{2l} = k^2 + 176.$$
$$(5 \times 3^l - k)(5 \times 3^l + k) = 2^4 \times 11. \qquad \cdots ③$$

$5 \times 3^l - k$, $5 \times 3^l + k$ はともに整数であり $5 \times 3^l + k > 0$, $k > 0$ より

$$0 < 5 \times 3^l - k < 5 \times 3^l + k.$$

さらに

$$5 \times 3^l + k - (5 \times 3^l - k) = 2k$$

なので，$5 \times 3^l - k$ と $5 \times 3^l + k$ の偶奇は一致する．
以上より，③ を満たすものは

$$\begin{aligned} &(5 \times 3^l - k,\ 5 \times 3^l + k) \\ &= (2,\ 2^3 \times 11),\ (2^2,\ 2^2 \times 11),\ (2^3,\ 2 \times 11) \\ &= (2,\ 88),\ (4,\ 44),\ (8,\ 22) \end{aligned}$$

より

$$(5 \times 3^l,\ k) = (45,\ 43),\ (24,\ 20),\ (15,\ 7).$$

- $(5 \times 3^l,\ k) = (45,\ 43)$ のとき

$$(l,\ k) = (2,\ 43).$$

- $(5 \times 3^l,\ k) = (24,\ 20)$ のとき
  これを満たす自然数 l は存在しない．
- $(5 \times 3^l,\ k) = (15,\ 7)$ のとき

$$(l,\ k) = (1,\ 7).$$

$n = 2l$ であるから，$(*)$ を満たす自然数の組 $(n,\ k)$ は

$$\boxed{(n,\ k) = (2,\ 7),\ (4,\ 43)}. \qquad \cdots\text{（答）}$$

＜(2) の別解＞

$$25 \times 3^n = k^2 + 176. \qquad \cdots (*)$$

自然数 n, k が $(*)$ を満たすとき $25 \cdot 3^n \geqq 176$ より $n \geqq 2$.
n が奇数であると仮定すると

$$n = 2l + 1 \quad (l = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と表せる．
このとき

$$\begin{aligned} 3^n &= 3^{2l+1} \\ &= 3 \times 9^l \\ &= 3 \times (8+1)^l \\ &= 3 \times \left(1 + \sum_{m=1}^{l} {}_l\mathrm{C}_m 8^m\right) \\ &= 3 \times \left(1 + 4\sum_{m=1}^{l} {}_l\mathrm{C}_m 2 \cdot 8^{m-1}\right) \\ &= 4 \cdot 3 \sum_{m=1}^{l} {}_l\mathrm{C}_m 2 \cdot 8^{m-1} + 3 \end{aligned}$$

と表せるので，$3 \sum_{m=1}^{l} {}_l\mathrm{C}_m 2 \cdot 8^{m-1} = Q$ とおくと Q は整数であり

$$3^n = 4Q + 3.$$

このとき，$(*)$ より

$$\begin{aligned} k^2 &= 25 \times 3^n - 176 \\ &= 25(4Q + 3) - 176 \\ &= 4(25Q - 26) + 3 \end{aligned}$$

であり，k^2 を 4 で割った余りが 3 となるから (1) に矛盾する．
よって，n は偶数である．（証明終り）