北大（文系）

$\boxed{1}$

$$S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7). \quad \cdots ①$$

(1)　① より

$$a_1=S_1=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 9=3.$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n-S_{n-1} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)-\frac{1}{6}(n-1)n(2n+5) \\ &= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+7)-(n-1)(2n+5)\} \\ &= \frac{1}{6}n(6n+12) \\ &= n(n+2). \end{aligned}$$

これは，$a_1=3$ を満たす.

以上より

$$\boxed{a_n=n(n+2)}. \quad \cdots(答)$$

(2)　(1) より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \\ &= \boxed{\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}}. \end{aligned} \quad \cdots(答)$$

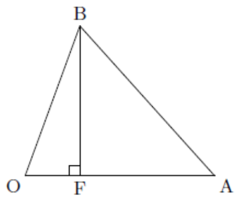
(注)

上の計算において

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

を導くときは $n \geqq 2$ として考えているが，(答) は $n=1$ のときも成り立つ.

$\boxed{2}$ (1)



点 F は直線 OA 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = k\vec{a}$（$k$ は実数）とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \overrightarrow{\mathrm{OF}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = k\vec{a} - \vec{b}.$$

$\overrightarrow{\mathrm{BF}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{BF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$ であるから

$$(k\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0.$$

$$k|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

$|\vec{a}| = 4,\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ より

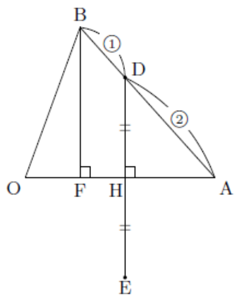
$$16k - 6 = 0.$$

$$k = \frac{3}{8}.$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \boxed{\frac{3}{8}\vec{a}}. \quad \cdots(答)$$

(2)



点 D から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を H とすると，$\overrightarrow{\mathrm{DH}} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{BF}}$ であり，△ADH ∽ △ABF および AD : DB = 2 : 1 より

$$\mathrm{DH} : \mathrm{BF} = 2 : 3.$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BF}}.$$

これと (1) の結果および $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + 2\overrightarrow{\mathrm{DH}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{BF}}\\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{8}\vec{a} - \vec{b}\right)\\ &= \boxed{\frac{5}{6}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}}. \quad \cdots(答)\end{aligned}$$

(3) $9|\overrightarrow{\mathrm{OE}}| = 20|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|$ のとき，(1), (2) の結果より

$$9\left|\frac{5\vec{a} - 4\vec{b}}{6}\right| = 20 \cdot \frac{3}{8}|\vec{a}|.$$

$|\vec{a}| = 4$ より

$$|5\vec{a} - 4\vec{b}| = 20.$$

両辺を 2 乗すると

$$25|\vec{a}|^2 - 40\vec{a} \cdot \vec{b} + 16|\vec{b}|^2 = 400.$$

$|\vec{a}| = 4,\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ より

$$25 \cdot 4^2 - 40 \cdot 6 + 16|\vec{b}|^2 = 400.$$

$$|\vec{b}|^2 = 15.$$

$|\vec{b}| > 0$ より

$$|\vec{b}| = \boxed{\sqrt{15}}. \quad \cdots(答)$$

＜(2) の別解＞

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = l\vec{a}$（$l$ は実数）とおき，$\overrightarrow{\mathrm{DH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から (1) と同様にして

$$l = \frac{7}{12}.$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{7}{12}\vec{a}$$

となり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + 2\,\overrightarrow{\mathrm{DH}}\\ &= 2\,\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}}\\ &= \boxed{\frac{5}{6}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}}. \quad \cdots(答)\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)+4\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$

(1)　$t=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ のとき

$$\begin{aligned}\sin^2\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)&=\sin^2\left\{\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right\}\\&=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\\&=1-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\\&=\boxed{1-t^2}.\end{aligned}$$

…（答）

$$\begin{aligned}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)&=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\\&=1-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\\&=\boxed{1-2t^2}.\end{aligned}$$

…（答）

(2)
$$t=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\qquad\cdots①$$

とおくと，(1) の結果より

$$\begin{aligned}f(x)&=\sqrt{3}t+2(1-t^2)+4(1-2t^2)\\&=-10t^2+\sqrt{3}t+6.\end{aligned}$$

$0\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$\frac{\pi}{6}\leqq x+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{7}{6}\pi\qquad\cdots②$$

より

$$-\frac{1}{2}\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$$

つまり

$$-\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1\qquad\cdots③$$

である．このとき $f(x)=0$ より

$$\begin{aligned}&-10t^2+\sqrt{3}t+6=0.\\&(5t+2\sqrt{3})(2t-\sqrt{3})=0.\\&t=-\frac{2\sqrt{3}}{5},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる．

$$-\frac{2\sqrt{3}}{5}<-\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$$

であるから ③ より

$$t=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

このとき，① より

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

② より

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi.$$
$$\boxed{x=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}}.$$

…（答）

＜(1) の別解＞

$t=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ より

$$\begin{aligned}t^2&=\frac{3}{4}\sin^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{4}\cos^2 x\\&=\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}.\end{aligned}\qquad\cdots ⓐ$$

同様にして

$$\begin{aligned}\sin^2\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)&=\left(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2\\&=-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}.\end{aligned}\qquad\cdots ⓑ$$

さらに

$$\cos\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x.\qquad\cdots ⓒ$$

ⓐ + ⓑ より

$$t^2+\sin^2\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)=1.$$
$$\sin^2\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)=\boxed{1-t^2}.$$

…（答）

ⓐ × 2 + ⓒ より

$$2t^2+\cos\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)=1.$$
$$\cos\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)=\boxed{1-2t^2}.$$

…（答）

$\boxed{4}$

$$\ell : y = (1-k)x + k.$$
$$C : y = x^2.$$

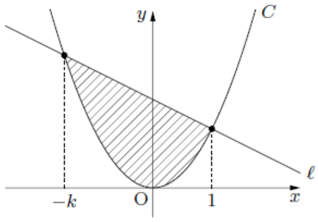
(1) C と ℓ の交点の x 座標を求めると

$$x^2 = (1-k)x + k.$$
$$x^2 + (k-1)x - k = 0.$$
$$(x+k)(x-1) = 0.$$
$$x = -k,\ 1.$$

ここで，$k > -1$ より

$$-k < 1$$

であるから，S_1 は次図の斜線部分の面積である．

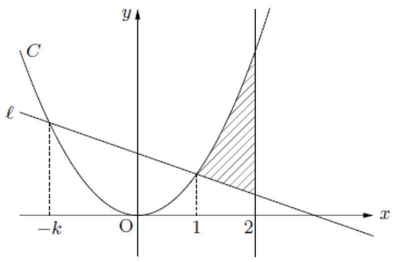


図より

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-k}^{1} \left\{(1-k)x + k - x^2\right\} dx \\ &= -\int_{-k}^{1} (x+k)(x-1)\,dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{1-(-k)\right\}^3 \\ &= \boxed{\frac{1}{6}(k+1)^3}. \end{aligned}$$

…(答)

(2) (1) より，S_2 は次図の斜線部分の面積である．



図より

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{1}^{2} \left[x^2 - \left\{(1-k)x + k\right\}\right] dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{k-1}{2}x^2 - kx\right]_1^2 \\ &= \frac{8}{3} + 2(k-1) - 2k - \left(\frac{1}{3} + \frac{k-1}{2} - k\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}k + \frac{5}{6}}. \end{aligned}$$

…(答)

(3) (1), (2) より

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \frac{1}{2}k + \frac{5}{6} - \frac{1}{6}(k+1)^3 \\ &= -\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

ここで

$$f(k) = -\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{2}{3} \quad (k > -1)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(k) &= -\frac{1}{2}k^2 - k \\ &= -\frac{1}{2}k(k+2). \end{aligned}$$

これより，$f(k)$ の増減は次のようになる．

k	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(k)$		$+$	0	$-$
$f(k)$		↗	$\frac{2}{3}$	↘

よって，$S_2 - S_1$ は $k = 0$ のとき

$\boxed{最大値\ \frac{2}{3}}$ …(答)

をとる．