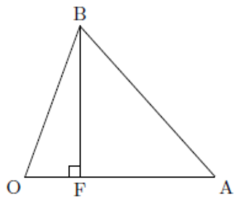
1 (1)



点 F は直線 OA 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = k\vec{a}$（$k$ は実数）とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \overrightarrow{\mathrm{OF}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = k\vec{a} - \vec{b}.$$

$\overrightarrow{\mathrm{BF}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{BF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$ であるから

$$(k\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0.$$

$$k|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

$$k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}.$$

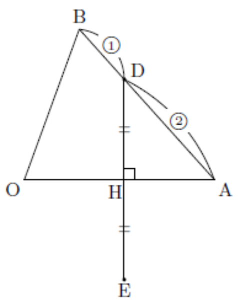
$|\vec{a}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ より

$$k = \frac{3}{8}.$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \boxed{\frac{3}{8}\vec{a}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)



点 D から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を H とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = l\vec{a}$（$l$ は実数）とおくと (1) と同様にして

$$l = \frac{\vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\vec{a}|^2}.$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$, $|\vec{a}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ より

$$l = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})}{3|\vec{a}|^2} = \frac{7}{12}.$$

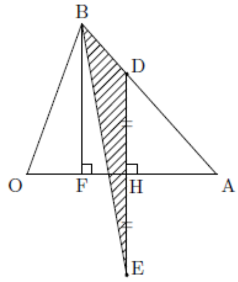
よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{7}{12}\vec{a}$$

となり

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + 2\overrightarrow{\mathrm{DH}} \\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} \\ &= \boxed{\frac{5}{6}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}}. \end{aligned} \qquad \cdots(\text{答})$$

(3)



△BDE の面積が $\dfrac{5}{9}$ より

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{DE}}||\overrightarrow{\mathrm{FH}}| = \frac{5}{9}. \qquad \cdots①$$

一方，(1), (2) と $|\vec{a}| = 4$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{FH}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OF}}| = \left|\frac{5}{24}\vec{a}\right| = \frac{5}{6}. \qquad \cdots②$$

①, ② より

$$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}| = \frac{4}{3}.$$

さらに

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{DE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} \\ &= \frac{5}{6}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} \end{aligned}$$

であるから

$$\left|\frac{3\vec{a} - 8\vec{b}}{6}\right| = \frac{4}{3}.$$

$$|3\vec{a} - 8\vec{b}|^2 = 8^2.$$

$$9|\vec{a}|^2 - 48\vec{a} \cdot \vec{b} + 64|\vec{b}|^2 = 64.$$

$|\vec{a}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ より

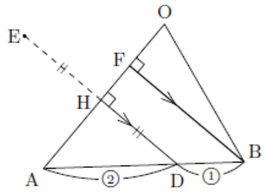
$$9 \cdot 4^2 - 48 \cdot 6 + 64|\vec{b}|^2 = 64.$$

$$|\vec{b}|^2 = \frac{13}{4}.$$

$|\vec{b}| > 0$ より

$$|\vec{b}| = \boxed{\frac{\sqrt{13}}{2}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

＜**(2)** の別解＞



点 D から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を H とすると，$\overrightarrow{\mathrm{DH}} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{BF}}$ であり，$\triangle\mathrm{ADH} \backsim \triangle\mathrm{ABF}$ および $\mathrm{AD} : \mathrm{DB} = 2 : 1$ より

$$\mathrm{DH} : \mathrm{BF} = 2 : 3.$$

よって

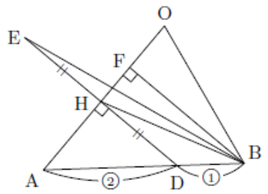
$$\overrightarrow{\mathrm{DH}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BF}}.$$

これと (1) の結果および $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + 2\overrightarrow{\mathrm{DH}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{BF}}\\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{8}\vec{a} - \vec{b}\right)\\ &= \boxed{\frac{5}{6}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}}.\end{aligned}$$

…（答）

＜**(3)** の別解＞



(1) より $\mathrm{OF} : \mathrm{OA} = 3 : 8$，さらに $\mathrm{AH} : \mathrm{AF} = \mathrm{AD} : \mathrm{DB} = 2 : 1$，$\mathrm{DE} : \mathrm{DH} = 2 : 1$ より

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BDE} &= 2\triangle\mathrm{BDH}\\ &= 2\cdot\left(\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABH}\right)\\ &= 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABF}\right)\\ &= 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{5}{8}\triangle\mathrm{OAB}\right)\\ &= \frac{5}{18}\triangle\mathrm{OAB}.\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{BDE} = \dfrac{5}{9}$ より

$$\frac{5}{18}\triangle\mathrm{OAB} = \frac{5}{9}.$$
$$\triangle\mathrm{OAB} = 2.$$

よって

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} = 2$$

であり，$|\vec{a}| = 4$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6$ より

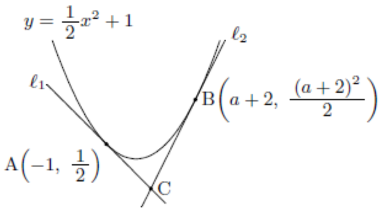
$$\frac{1}{2}\sqrt{4^2\cdot|\vec{b}|^2 - 6^2} = 2.$$
$$16|\vec{b}|^2 - 36 = 16.$$
$$|\vec{b}|^2 = \frac{13}{4}.$$

$|\vec{b}| > 0$ より

$$|\vec{b}| = \boxed{\frac{\sqrt{13}}{2}}.$$

…（答）

2 (1)



$y=\dfrac{1}{2}x^2$ より $y'=x$ であるから，ℓ_1 の方程式は

$$y=-(x+1)+\frac{1}{2}.$$

$$y=-x-\frac{1}{2}. \qquad \cdots ①$$

同様にして，ℓ_2 の方程式は

$$y=(a+2)x-\frac{(a+2)^2}{2}. \qquad \cdots ②$$

①, ② より y を消去すると

$$(a+2)x-\frac{(a+2)^2}{2}=-x-\frac{1}{2}.$$

$$(a+3)x=\frac{(a+1)(a+3)}{2}.$$

$a \neq -3$ より

$$x=\frac{a+1}{2}.$$

これを ① に代入すると

$$y=-\frac{a+2}{2}.$$

よって

$$\boxed{\mathrm{C}\left(\frac{a+1}{2},\ -\frac{a+2}{2}\right)}. \qquad \cdots(答)$$

(2)　$a>0$ と (1) の結果より

$$|\mathrm{AB}|=\sqrt{(a+2+1)^2+\left\{\frac{(a+2)^2}{2}-\frac{1}{2}\right\}^2}$$
$$=\frac{a+3}{2}\sqrt{a^2+2a+5}.$$

$$|\mathrm{BC}|=\sqrt{\left(a+2-\frac{a+1}{2}\right)^2+\left\{\frac{(a+2)^2}{2}+\frac{a+2}{2}\right\}^2}$$
$$=\frac{a+3}{2}\sqrt{a^2+4a+5}.$$

以上より

$$\frac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}=\sqrt{\frac{a^2+2a+5}{a^2+4a+5}}.$$

ここで，$f(a)=\dfrac{a^2+2a+5}{a^2+4a+5}$　$(a>0)$ とおくと

$$f'(a)=\frac{(2a+2)(a^2+4a+5)-(a^2+2a+5)(2a+4)}{(a^2+4a+5)^2}$$
$$=\frac{2(a+\sqrt{5})(a-\sqrt{5})}{(a^2+4a+5)^2}.$$

これより，$a>0$ における $f(a)$ の増減は次のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\sqrt{5}$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		↘		↗

よって，$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}$ が最小となるときの a の値は

$$\boxed{\sqrt{5}}. \qquad \cdots(答)$$

＜(2) の別解＞

$$\frac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}=\sqrt{1-\frac{2a}{a^2+4a+5}}=\sqrt{1-\frac{2}{a+\frac{5}{a}+4}}.$$

これより，$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}$ が最小となるのは $\dfrac{2}{a+\frac{5}{a}+4}$ が最大のとき，すなわち $a+\dfrac{5}{a}$ が最小のときであり，$a>0$, $\dfrac{5}{a}>0$ なので相加平均・相乗平均の関係より

$$a+\frac{5}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{5}{a}}=2\sqrt{5}.$$

等号成立は $a=\dfrac{5}{a}$ かつ $a>0$ すなわち $a=\sqrt{5}$ のとき．

よって，$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}$ が最小となるときの a の値は

$$\boxed{\sqrt{5}}. \qquad \cdots(答)$$

3　$$\frac{9^{4x}+9^{y^2+1}}{6}=3^{4x+y^2}. \quad \cdots(\star)$$

(1)　$3^{4x}=X$, $3^{y^2}=Y$ とおくと $(\star)$ より

$$\frac{X^2+9Y^2}{6}=XY.$$
$$(3Y-X)^2=0.$$
$$Y=\frac{1}{3}X.$$

以上より

$$3^{y^2}=\frac{1}{3}\cdot 3^{4x}.$$
$$3^{y^2}=3^{4x-1}.$$
$$\boxed{y^2=4x-1}. \quad \cdots(\text{答})$$

(2)　$x>0$, $y>0$ のとき

$$1-\frac{x}{y}>0 \Leftrightarrow y>x$$
$$\Leftrightarrow y^2>x^2.$$

よって，正の実数 x, y が $(\star)$ および $1-\dfrac{x}{y}>0$ を満たしながら動くとき，(1) の結果より

$$4x-1>x^2.$$
$$x^2-4x+1<0.$$
$$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}.$$

である．このとき

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}\\&=\log_4\left(1+\frac{x}{y}\right)+\log_4\left(1-\frac{x}{y}\right)\\&=\log_4\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\\&=\log_4\left(1-\frac{x^2}{4x-1}\right).\end{aligned}$$

ここで

$$f(x)=1-\frac{x^2}{4x-1} \quad (2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3})$$

とおくと，底 4 は 1 より大きいので $f(x)$ が最大となるとき $\log_4 f(x)$ は最大となる．

$$\begin{aligned}f'(x)&=-\frac{2x(4x-1)-x^2\cdot 4}{(4x-1)^2}\\&=\frac{-2x(2x-1)}{(4x-1)^2}.\end{aligned}$$

これから $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$(2-\sqrt{3})$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$(2+\sqrt{3})$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	

よって，$\dfrac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\dfrac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}$ は $x=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値

$$\boxed{\log_4\frac{3}{4}} \quad \cdots(\text{答})$$

をとる．

＜(2) の別解＞

(1) の結果より

$$x=\frac{y^2+1}{4}. \quad \cdots①$$

よって，相加平均・相乗平均の関係を用いると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}\\&=\log_4\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\\&=\log_4\left\{1-\frac{(y^2+1)^2}{16y^2}\right\}\\&=\log_4\left\{1-\frac{1}{16}\left(y^2+\frac{1}{y^2}+2\right)\right\}\\&\leqq\log_4\left\{1-\frac{1}{16}\left(2\sqrt{y^2\cdot\frac{1}{y^2}}+2\right)\right\}\\&=\log_4\left(1-\frac{1}{4}\right)\\&=\log_4\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

等号成立は $y^2=\dfrac{1}{y^2}$ かつ $y>0$ すなわち $y=1$ のとき．

このとき ① より $x=\dfrac{1}{2}$ でこれらは $1-\dfrac{x}{y}>0$ を満たす．

したがって，$\dfrac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\dfrac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}$ の最大値は

$$\boxed{\log_4\frac{3}{4}}. \quad \cdots(\text{答})$$

4

$$a_1 = 2,\ b_1 = 1, \qquad \cdots ①$$
$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n, \qquad \cdots ②$$
$$b_{n+1} = a_n + 2b_n, \qquad \cdots ③$$
$$c_n = a_n b_n. \qquad \cdots ④$$

(1)　①, ②, ③ より

$$a_2 = 7,\ b_2 = 4$$

となるので ④ より

$$\boxed{c_2 = 28}. \qquad \cdots（答）$$

(2)　まず ①, ②, ③ より，すべての n で a_n, b_n は正の整数であることに注意する．

「c_n は偶数」　$\cdots(*)$

であることを数学的帰納法で示す．

(i)　$n=1$ のとき，①, ④ より

$$c_1 = 2.$$

よって，$(*)$ が成り立つ．

(ii)　$n=k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定すると

$$c_k = 2M \qquad (M \text{ は整数}) \qquad \cdots ⑤$$

と表せる．②, ③, ④ より

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= a_{k+1}b_{k+1} \\ &= (2a_k + 3b_k)(a_k + 2b_k) \\ &= 2a_k{}^2 + 7a_kb_k + 6b_k{}^2 \\ &= 2a_k{}^2 + 7c_k + 6b_k{}^2 \\ &= 2a_k{}^2 + 14M + 6b_k{}^2 \qquad (⑤ \text{ より}) \\ &= 2(a_k{}^2 + 7M + 3b_k{}^2). \end{aligned}$$

$a_k{}^2 + 7M + 3b_k{}^2$ は整数であるから，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i), (ii) より，すべての自然数 n について $(*)$ は成り立つ．すなわち，c_n は偶数である．　（証明終り）

(3)　「n が偶数のとき，c_n は 28 で割り切れる」

すなわち

「l が正の整数のとき，c_{2l} は 28 で割り切れる」　$\cdots(**)$

ことを数学的帰納法で示す．

(i)　$l=1$ のとき $c_2 = 28$ から $(**)$ は成り立つ．

(ii)　$l=k$ のとき $(**)$ が成り立つと仮定すると

$$c_{2k} = 28N \qquad (N \text{ は整数}) \qquad \cdots ⑥$$

と表せる．②, ③, ④ より

$$\begin{aligned} c_{2k+2} &= a_{2k+2}b_{2k+2} \\ &= (2a_{2k+1} + 3b_{2k+1})(a_{2k+1} + 2b_{2k+1}) \\ &= \{2(2a_{2k} + 3b_{2k}) + 3(a_{2k} + 2b_{2k})\} \\ &\qquad \cdot \{(2a_{2k} + 3b_{2k}) + 2(a_{2k} + 2b_{2k})\} \\ &= (7a_{2k} + 12b_{2k})(4a_{2k} + 7b_{2k}) \\ &= 28a_{2k}{}^2 + 97a_{2k}b_{2k} + 84b_{2k}{}^2 \\ &= 28a_{2k}{}^2 + 97c_{2k} + 84b_{2k}{}^2 \\ &= 28a_{2k}{}^2 + 97 \cdot 28N + 84b_{2k}{}^2 \qquad (⑥ \text{ より}) \\ &= 28(a_{2k}{}^2 + 97N + 3b_{2k}{}^2). \end{aligned}$$

$a_{2k}{}^2 + 97N + 3b_{2k}{}^2$ は整数であるから，$l = k+1$ のときも $(**)$ は成り立つ．

(i), (ii) より，すべての自然数 l について $(**)$ は成り立つ．すなわち，n が偶数のとき，c_n は 28 で割り切れる．

（証明終り）

5

$$C:\begin{cases} x=(1+\cos\theta)\cos\theta, \\ y=\sin\theta. \end{cases} \qquad (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

(1)
$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta)$$
$$=-2\sin\theta\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)$$

であるから，x の増減は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$-$	0	$+$	0
x	2	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

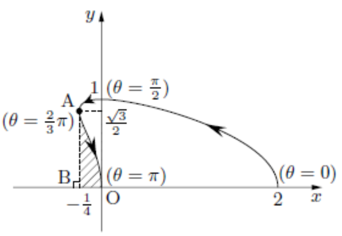
これより x の最小値 a は

$$\boxed{a=-\frac{1}{4}}.$$ …（答）

(2) $\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta$ より y の増減は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	1	↘	0

これと (1) の増減表を合わせると C の概形は次のようになる．



求めるのは図の斜線部分の面積であり，それを S とすると

$$S=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}y\,dx$$
$$=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}y\cdot\frac{dx}{d\theta}\cdot d\theta$$
$$=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin\theta(-2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta)\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\left(-2\sin^2\theta\cos\theta-\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)d\theta$$
$$=\left[-\frac{2}{3}\sin^3\theta-\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$
$$=-\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{6}}.$$ …（答）